◆過去５年間の分析◆

【2018 年度】

ここ数年見られた易化傾向から一転し標準からやや難レベルの問題が増え，2015 年度以前の難易度に近くなった。難しい問題から易しい問題までバランスよく出題され，受験生の学力を測るに，ちょうどよいセットになっている。2017 年度の出題と変わった点は

「昨年度出題されなかった確率が出題された」

「漸化式に関する問題が出題されなかった」

「$\boxed{1}$ が整数問題に戻った」

「確率が n を含むものではなかった」

である。

各設問のレベルを見てみよう。$\boxed{3}$(1)，$\boxed{5}$ は確実に得点したい易しい問題である。$\boxed{4}$ は 2001 年度に出題された問題とほぼ同じであり，やや難レベルといえる。類題を解いたことがあるかどうかで差がつく問題である。$\boxed{1}$(1)は帰納法を用いる方針が立てば難しくはないが，着想に苦労するかもしれない。$\boxed{2}$ は $\boxed{1}$，$\boxed{4}$ とともに 2018 年度の問題の中では難しい。$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$ でどの程度得点するかが合否の分かれ目となったと考えられる。

出題形式も 2016 年度，2017 年度は小問のない問題が多く出題されたが，2018 年度はそのような問題は 2 題に減った。

各問題を見ていこう。

$\boxed{1}$ 一橋で出題されている整数問題では，範囲を絞ってしらみつぶしに調べるタイプが多く出題されている。本問も n の桁数を k とすると，$k \geqq 5$ のとき $n > 30S(n) + 2018$ が成り立つことを示し，$n = 30S(n) + 2018$ が成り立つには，$k \leqq 4$ が必要であることから k の範囲を絞る。さらに，n の一の位の数字はすぐに求まることから，残りの各位の数字を求めればよいこととなり，これも各位の数字が 0 以上 9 以下であることから調べることとなる。また，(1)の不等式は，数学的帰納法を用いて示すとよいが，他にも $n - (30S(n) + 2018) > 0$ を n の各位の数字が 0 以上 9 以下であることから示すこともできる(解説 **2°**)。

$\boxed{2}$ 座標平面上の図形に関する問題も一橋では頻出である。着目する図形の面積は t を用いて表そうとすると考えにくい。半円の半径が 1(一定)であることから，中心 O から l までの距離 d が大きいほど面積 S は小さくなることに着目する。d を t を用いて表すと，点と直線の距離の公式から $d = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2+1}$ である。y 軸に関する対称性から $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲において考えればよいことに注意すると，t が増加すると d も増加し，S は減少する。後は $t = 0$ の場合と $t = 1$ の場合の S の値を求めることとなる。

Sを定式化することにこだわるのなら$\angle\mathrm{POQ}=2\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおいて考えることもできるが，微分して$S$の増減を調べようとすると，数Ⅲの範囲となってしまう。微分を用いなくてもSの増減を調べることはできる(解説**1°**)が，文系の学生にとっては少し技巧的なものであろう。

$\boxed{3}$ (1)は特に問題はないだろう。この問題はできないとまずい。(2)は工夫しようと思っても，あまり楽な手は見つからない。そうなると，$6^3=216$通りを調べるつもりで考えたほうが楽になる。そう考えれば難しい問題ではないが，時間がかかる。また，数え漏らす危険性もあり，本番のテストとしては扱いにくいものだと思う。目の出方が6通りとなる3つの目の組合せを，解答のように「同じ目の出るさいころの個数」などで分類し，慎重にしらみつぶしに調べるとよい。

本問は，確率の定義通りに求める問題であり，さいころのすべての目の出方$6^3=216$通りの中で，題意を満たす目の出方が何通りあるかを考えるものであるが，このようにnが関係しない具体的な場合の数の比としての確率の出題は珍しい。一橋では，“確率p_nを求めよ”などといったnに関連する確率を求める問題が圧倒的に多い(ただし，後期試験には本問のような問題も出題されてはいるが)。今後は本問のような傾向の問題にも注意が必要である。

$\boxed{4}$ 今年度も空間図形に関する問題が出題された。本問は体積をp，qの式で表すところまでは難しくはない。$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{6}$であることをどのように用いるかが問題である。体積の式，p，qの満たすべき条件はともにp，qに関して対称な式であることに注意する。p^2+1とq^2+1の積が一定となることから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均)の関係にもっていくか，p^2，q^2を解にもつ方程式を考え，2次方程式の実数解条件を考えるとよい(解説**2°**)。方程式の理論に帰着して考える問題は2016年度$\boxed{2}$にも出題されている。また，本問と同内容の問題が2001年度に出題されている。

「四面体OAPQにおいて，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$で，$\angle\mathrm{PAQ}=30°$である。

(1) △APQの面積Sを求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$のとりうる範囲を求めよ。

(3) 四面体OAPQの体積Vの最大値を求めよ。」

という問題である。本問と同じように考えればよい。参考にしてもらいたい。

(答) (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (2) $0<|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (3) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{18}$

$\boxed{5}$ 今年度の問題の中では，最も扱いやすいものである。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標は簡単に求めることができ，それを利用して(1)は解くことができる。また，(2)では曲線で囲まれた2つの部分の面積を別々に求めるのではなく，一つの定積分の式に直してから計算する。

過去の問題においても微積分の分野の出題は典型問題が多い。きちんとした準備をしておけば点数となる問題が多いということである。

【2017 年度】

2016年度までの一橋大の出題と大きく変わったことは

「1993年度から続いていた確率の出題がなかった」

ということである。これには受験生は戸惑ったことと思う。

他にも2015年度，2016年度と異なる点として

「$\boxed{1}$ が整数ではなかった」，「選択問題がなくなった」，

「データ分析の出題がなかった」

が挙げられる。

また，これまで難しい問題の出題を続けてきた大学とは思えないくらい，取り組みやすい問題が多かった。

各問題を見てみよう。

$\boxed{1}$ は条件付き2変数の対数関数の最大値，最小値を求める問題である。一橋では，最近20年のうち2004年以外すべて $\boxed{1}$ は整数が出題されていたが，今年度は違う分野の出題であった。内容は基本的なものであり，受験生は肩すかしを食った感じであろう。2変数といっても，$a+b=9$ の条件から，1 つの変数を消去すれば直ちに1変数の問題となる．ここで，注意するべきことは消去した文字の条件，b を消去した場合であれば $b \geqq 1$ を忘れないことである。本問であれば，$9-a \geqq 1$ となり，これから a の変域を求めることができる。

本問は，必ず完答しなければいけないレベルの問題である。

$\boxed{2}$ は整数問題であった。大小関係などの必要条件から範囲を絞り，後はしらみつぶしに調べるという一橋で頻出の手法を用いる問題である。

まずは，与えられた式をどのように変形して，範囲を絞る式をつくるかが問題となる。例えば，2式の差をとると，定数項7が消去され，$x^2-y^2=yz-zx$ となる。これは $(y-z)(x+y+z)=0$ と因数分解できる形になる。$y=z$ のときは不合理であることを示し，$x+y+z=0$ を導くと，x，y，z のいずれかのとる値の範囲を絞ることができる． 他にも，3式の和をとると3つの平方式の和の形を作ることができ，これから範囲を絞ることができる。

一橋の過去問をある程度解いている受験生は対応できたと思う。差のつく問題である。

$\boxed{3}$ 整式に関する問題は一橋では珍しい。まずは $P(x+1)-P(x)=2x$ から，整式 $P(x)$ の次数を定める。次に $P(0)=1$ であることと，$P(x+1)-P(x)$ を計算して，右辺の $2x$ と係数を比べることにより $P(x)$ が決定するといった基本的な問題である。

また，$P(x+1)-P(x)$ の式が，x が整数 n であるとき数列 $\{P(n)\}$ の階差であることから，$P(n)$ を求め，恒等式の考え方から $P(x)$ を決定することもできる。

難易度は高くないが，整式の扱いに慣れていない受験生は苦労したと思う。

$\boxed{4}$ 与えられた連立不等式の係数に3つの文字があり，扱いにくい印象を持つ。けれども，xy 平面に不等式が表す領域 D を描いてみると，$ax+by=1$ と $cx-by=-1$，$ax+by=-1$ と $cx-by=1$ の y 切片が等しくなることから，面積は簡単に a，b，c の式で表されることがわかる。後は $\boxed{1}$ の場合と同じく，$a+b+c=1$ を用いて，a，c を消去し面積を b の式で表し最小値を求めればよい。

$\boxed{5}$ 直線 k，l，m の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{k}$，$\overrightarrow{l}$，$\overrightarrow{m}$ とすると，P_1 の座標と $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\cdot\overrightarrow{l}=0$ から P_2 の座標を求めることができる。同様にして，P_2 の座標と $\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\cdot\overrightarrow{m}=0$ から P_3 の座標を求めることができる。このことを繰り返すと，P_4，P_5，……と決定していくことから，漸化式をつくるという方針を立てることは容易である。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ は，n を3で割った余りが1のときは l，n を3で割った余りが2のときは m，n が3の倍数のときは k と垂直であることから，n を3で割った余りで分類するという作業が必要となる。だが，本問の場合，方向ベクトル $\overrightarrow{k}$，$\overrightarrow{l}$，$\overrightarrow{m}$ の成分がそれぞれ $(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$ であり，x，y，z 成分を入れ替えたものになっているという特徴がある。そのため，扱う漸化式は n を3で割った余りで分類したいずれの場合でも同じ形になり，そのことに気づけば計算量は多くない。

漸化式に関する問題は，最近では2016年，2014年，2013年，2012年，2011年，2010年に出題されている。2016年には2題が出題された。極めて出題率が高いといえる。

【2016 年度】

$\boxed{1}$～$\boxed{4}$ までは小問がないため，答えに到るまでのプロセスをきちんと答案に書ききる記述力が必要となる。試験後に，「答は予想できたが，説明がうまくかけなかった」という声を多く聞いた。

$\boxed{1}$ は例年通り整数からの出題であった。与えられた式は $6\cdot 27^x+1=7\cdot 25^x$ と表せ，$x=0$，2 がこれを満たすことはすぐにわかる。「$6\cdot 27^x$ の方が $7\cdot 25^x$ よりも大きくなるスピードが速い(∗)」ということから，求める解は $x=0$，2 だけであろうと予想することはできるが，$x\geqq 3$ において，この等式が成り立たないことをどのように示すかが問題である。式の評価，または，数学的帰納法による証明が考えやすいだろう。

(∗)のような感覚は，整数での問題の読み方の一つとして身につけてもらいたいものであるが，文系の学生にとっては難しい。近年では，2011 年にもこの感覚があると考えやすい問題が出題されている。

$\boxed{2}$ は 3 項間漸化式の関する問題である。文系では，2 項間漸化式を扱うことが多いために少しギョッとした人もいただろうが，$n=1$，2，3, $\cdots$ の場合で調べてみると状況はすぐにわかる。「すべての正の整数 n に対して，$\boxed{}$ が成り立つ」といった命題(全称命題)は，必要条件から考えていくことが定石である。$a_3=\cos 2\theta$，$a_4=\cos 3\theta$ であることが必要であることから，簡単に $\cos\theta$ の値を求めることができる。後は求めた値に対して，「すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つこと」を確認して十分である。

$\boxed{3}$ は，2 枚の硬貨の表，裏の推移を追っていけば，漸化式をつくることはすぐにわかるだろう。本問は“2 枚とも表”，“表と裏が 1 枚ずつ”，“2 枚とも裏”の 3 状態であるから，n 回の操作後のそれぞれの確率を a_n，b_n，c_n と置くことにより，連立の漸化式をつくる。後は $a_n+b_n+c_n=1$ であることを利用すればよい。2016 年の問題の中では，易しい問題である。一橋では過去に出題された問題と同じような手法で解ける問題が少なくない。確率漸化式の問題は，2011 年，2012 年，2013 年，2014 年と出題されている。過去問を練習してきた人にとって，本問は難なく解けたはずである。

$\boxed{4}$ は，係数に文字を含んだ 3 次関数の最大値に関する典型問題である。a の値により，$y=f(x)$ のグラフの形は変わる。“極値をもつか”，“定義域内に極値があるか”を考える。また，最大値の候補は，極値，定義域の端点の $f(x)$ の値であるから，

$y=f(x)$ のグラフを見ながらどの点で最大値をとるかに着目していけばよい。1977年(古い！)の東京大学で同じ問題が出題されている。古典的に有名な問題であるため，類題を解いたことがある人も多かったようだ。このような手垢のついた問題を一橋で出題することは珍しい。

$\boxed{5}$ は2015年と同じく選択問題である。[Ⅰ]は，2016年の出題の中では，最も難しい。ベクトルの顔をしているが，実際は，2変数関数の変域を求める問題である。$|\overrightarrow{a}|=a$，$|\overrightarrow{b}|=b$ と置き，両辺を平方すると，r^2 は分子，分母が a，b の2次式である分数式で表される。$a \neq 0$ であることに注意し，分子，分母を a^2 で割って，$\dfrac{b}{a}=t$ と置くことで分子，分母は t の2次式で表される。後は分母を払って，t の2次方程式と考え，それが正の実数解をもつ条件を考える。2次方程式の問題に帰着して考える問題(昨年度の $\boxed{2}$ もそうである)は，苦手にする人が多いが，難関校を受験する場合身につけておかなければならない重要な考え方の一つである。

[Ⅱ]は，2015年に続いてデータの分析が出題された。内容は，分散，標準偏差，相関係数の求め方を知っていれば解ける簡単なものである。$\boxed{5}$ は2016年の最難問と簡単な問題の選択となった。当然であるが，[Ⅱ]を選択した方が有利である。このような出題が来年以降続くかどうかはわからないが，データの分析に関してはセンター試験程度の対策はしておく必要がある。

【2015年度】

$\boxed{1}$ は n 以下の正の整数のうち，n と互いに素であるものの個数を数える問題である。倍数の個数を数える問題は一橋の整数問題では珍しいが難しくはない。(3)では，$p<q$ と大小関係を設定し，$E(n)$ を評価するという一橋でよく用いられる考え方を利用する。$\boxed{2}$ は難しい問題である。(1)では，図形的な考察から，点Cの座標を a，b で表すと，比較的簡単に結果は得られる。(2)では，s，t が a，b の対称式であることから，a，b の存在条件を考える。このような問題は，一橋に限らず，文系難関校でよく出題されるものである。$\boxed{3}$ は $\boxed{2}$ と同じく難しい問題である。まず，l と m が平行である条件は，正 n 角形の外接円において，各頂点が等間隔に現れることに着目すると考えやすい。さらに，n の偶奇での分類が必要となる。$\boxed{4}$ のように，独立に動く2つの点に関する問題は，一橋では頻出である。はじめに点Qを固定して，PQの長さを最小，最大とするPの位置を考える。続いて，固定していたQを動かして，PQの長さの最小値，最大値を求める。これも図形的な考察により，簡単に求めることが出来る。また，$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)\ (0 \leqq \alpha < 2\pi)$，$\mathrm{Q}(\cos\beta,\ 0,\ \sqrt{3}+\sin\beta)\ (0 \leqq \beta < 2\pi)$ として，PQ^2 を α，β で表し，予選決勝法を考えたよう

である。5 は選択問題である。[Ⅰ]は，周期をもつ数列の和に関する問題。具体的にいくつかの項を調べていけば，すぐに方針は立つと思う。(1)は難しくない。(2)で差がついたようである。[Ⅱ]は分散，相関係数，標準偏差の求め方を知っていれば解ける簡単なものである。
1, 4, 5 の出来が合否のポイントとなったようだ。

【2014 年度】

2 は近年の一橋の出題の中でも易しい問題であったが，他の問題は標準からやや難レベルの問題である。2013 年同様，計算量が少ないセットとなっている。

1 は解法の糸口を見つけにくい問題であるが，偶数の素数は 2 に限ること，また，3 で割った余りで分類して考える手法は過去にも出題されている。2 は放物線と接線で囲まれた部分の面積の最小値を求めるもので，2013 年も同じような問題であった。3 は円周上の点を円周上の点に移す問題であるが，このような変換に関する問題は近年では 2012 年に出題されている。(1)の結果から 2 倍角公式の形であることに気がつくことがポイントとなる。4 では 2013 年に続いて空間図形の出題である。本問は，2002 年に類題が出題されている。5 は例年通り確率の問題である。2011，2012，2013 年と同じように“漸化式をつくれ”という指示はないが，漸化式をつくる方針が考え易い。また，漸化式をつくらなくても，移動の仕方を考えると裏が 1 回か 3 回出る場合に限られることがわかり，そのことから解くことができる。ただし，キチンとした答案をつくることは難しい問題である。