［I］

(1) $f(x)$ の次数を 2 次以下とすると，$f(x)=px^2+qx+r$ とおける．

$$\begin{aligned}&f(x+1)-2f(x)+f(x-1)\\&=\{p(x+1)^2+q(x+1)+r\}-2(px^2+qx+r)+\{p(x-1)^2+q(x-1)+r\}\\&=2p\quad(\text{定数})\end{aligned}$$

$6x-2$ とはならないので不適．

$f(x)$ の次数を n 次 $(n\geqq 3)$ とすると，$f(x)=px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\quad(p\neq 0)$ とおける．

$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$ の n 次の係数は

$$p-2p+p=0$$

$n-1$ 次の係数は

$$(np+q)-2q+(-np+q)=0$$

$n-2$ 次の係数は

$$\left\{\frac{n(n-1)}{2}p+(n-1)q+r\right\}-2r+\left\{\frac{n(n-1)}{2}p-(n-1)q+r\right\}=n(n-1)p$$

よって，$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$ は $n-2$ 次式で，これが $6x-2$，つまり 1 次式となるので，

$$n-2=1\quad\therefore n=3$$

以上より，$f(x)$ の次数は $\boxed{3}_{ア}$ である．

$F(x)=f(x+1)-f(x)$ とおくと，$f(x)$ が 3 次式より，$F(x)$ は 2 次式である．

$$\begin{aligned}f(x+1)-2f(x)+f(x-1)&=6x-2\\\{f(x+1)-f(x)\}-\{f(x)-f(x-1)\}&=6x-2\\F(x)-F(x-1)&=6x-2\end{aligned}$$

$F(x)=px^2+qx+r\quad(p\neq 0)$ とおくと，

$$F(x)-F(x-1)=2px-p+q=6x-2$$

係数を比較して，

$$\begin{cases}2p=6\\-p+q=-2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad p=3,\ q=1$$

$F(x)=3x^2+x+r$ と表せて，$F(x)=f(x+1)-f(x)$ に $x=0$ を代入すると，

$$F(0)=f(1)-f(0)=b-a=r$$

$F(x)$ は $\boxed{3x^2+x+b-a}_{イ}$ と表せる．

$f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ とおけて，

$$F(x)=f(x+1)-f(x)=3px^2+(3p+2q)x+(p+q+r)=3x^2+x+b-a$$

係数を比較して，

$$\begin{cases}3p=3\\3p+2q=1\\p+q+r=b-a\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad p=1,\ q=-1,\ r=b-a$$

$f(x)=x^3-x^2+(b-a)x+s$ と表せて，$f(0)=s=a$ より，

$f(x)$ は $\boxed{x^3-x^2+(b-a)x+a}_{ウ}$ と表せる．

$f'(x)=3x^2-2x+b-a$ より，

$$f'(2)=12-4+b-a=0 \quad \therefore a-b=8$$

$$f(2)=8-4+2(b-a)+a=-24 \quad \therefore a-2b=28$$

解くと，$a=\boxed{-12}_{エ}$，　$b=\boxed{-20}_{オ}$

このとき，$f'(x)=(3x+4)(x-2)$ となり，$x=2$ の前後で $f'(x)$ の符号は負から正へと変化するから，確かに $x=2$ で $f(x)$ は極小値をもつ．

(2) k 番目に 2 本目の当たりくじを引くとする．$(2\leqq k\leqq 7)$

$k-1$ 番目までに当たりくじを 1 回，はずれくじを $k-2$ 回引き，k 番目に当たりくじを引く確率は

$$\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{P}_2\cdot{}_5\mathrm{P}_{k-2}}{{}_{10}\mathrm{P}_k}=\frac{(k-1)(10-k)(9-k)(8-k)}{1512}$$

$k=2$ のとき，$\dfrac{28}{126}$，$k=3$ のとき，$\dfrac{35}{126}$，$k=4$ のとき，$\dfrac{30}{126}$，

$k=5$ のとき，$\dfrac{20}{126}$，$k=6$ のとき，$\dfrac{10}{126}$，$k=7$ のとき，$\dfrac{3}{126}$

$k=3$ のとき，最大となる．

よって，2 本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人は $\boxed{3}_{カ}$ 番目にくじを引く人である．

次に，k 番目に 5 本目の当たりくじを引くとする．$(5\leqq k\leqq 10)$

$k-1$ 番目までに当たりくじを 4 回，はずれくじを $k-5$ 回引き，k 番目に当たりくじを引く確率は

$$\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_4\cdot{}_5\mathrm{P}_5\cdot{}_5\mathrm{P}_{k-5}}{{}_{10}\mathrm{P}_k}=\frac{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{6048}$$

これは，$5\leqq k\leqq 10$ において増加するので，$k=10$ のとき，最大となる．

よって，5 本目の当たりくじを引く確率が最も大きい人は $\boxed{10}_{キ}$ 番目にくじを引く人である．

A 君は 3 番目，B 君は 7 番目にくじを引くとき，

A 君が当たりくじを引く確率は，くじを引く順番によらないので

$$\frac{5}{10}=\boxed{\frac{1}{2}}_{ク}$$

B 君が 3 本目の当たりくじを引くのは，

6 番目までに当たりくじを 2 回，はずれくじを 4 回引き，7 番目に当たりくじを引く．その確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{P}_3\cdot{}_5\mathrm{P}_4}{{}_{10}\mathrm{P}_7}=\boxed{\frac{5}{28}}_{ケ}$$

A 君が 2 本目の当たりくじを引き，かつ B 君が 4 本目の当たりくじを引くのは，

2 番目までに当たりくじを 1 回，はずれくじを 1 回引き，3 番目に当たりくじを引き，

4 番目から 6 番目までに当たりくじを 1 回，はずれくじを 2 回引き，7 番目に当たりくじを引く．その確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{P}_2\cdot 5}{{}_{10}\mathrm{P}_3}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{P}_2\cdot{}_4\mathrm{P}_2}{{}_7\mathrm{P}_4}=\boxed{\frac{1}{14}}_{コ}$$

〔II〕

(1) $72=2^3\cdot 3^2$ の正の約数は

$$2^i\cdot 3^j \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3 \quad j=0,\ 1,\ 2)$$

より，個数は $4\cdot 3=12$(個) ...... (答)

これらの和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\cdot 13=195 \ \cdots\cdots \ (答)$$

(2) $n=p^aq^b$ の正の約数は

$$p^iq^j \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,a \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ b)$$

より，個数は $(a+1)(b+1)$ 個 ...... (答)

これらの和は

$$(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1} \ \cdots\cdots \ (答)$$

(3) $m=p^aq^bc^r$ の正の約数は

$$p^iq^jr^k \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,a \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ b \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ c)$$

より，個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$ 個

これが奇数となる条件は $a+1$, $b+1$, $c+1$ のすべてが奇数であること。

すなわち，a, b, c がすべて偶数であること ...... (答)

(4) 正の約数の個数が奇数となる条件は，素因数分解したときの指数がすべて偶数であることであるから，

その整数は正の整数の平方で表される数，すなわち平方数である。...... (答)

(5) $44^2=1936$, $45^2=2025$ より，$44^2<2020<45^2$ であるから，1 以上 2020 以下の整数で平方数は 1^2, 2^2, $\cdots$, 44^2 である。したがって，これらの総和は

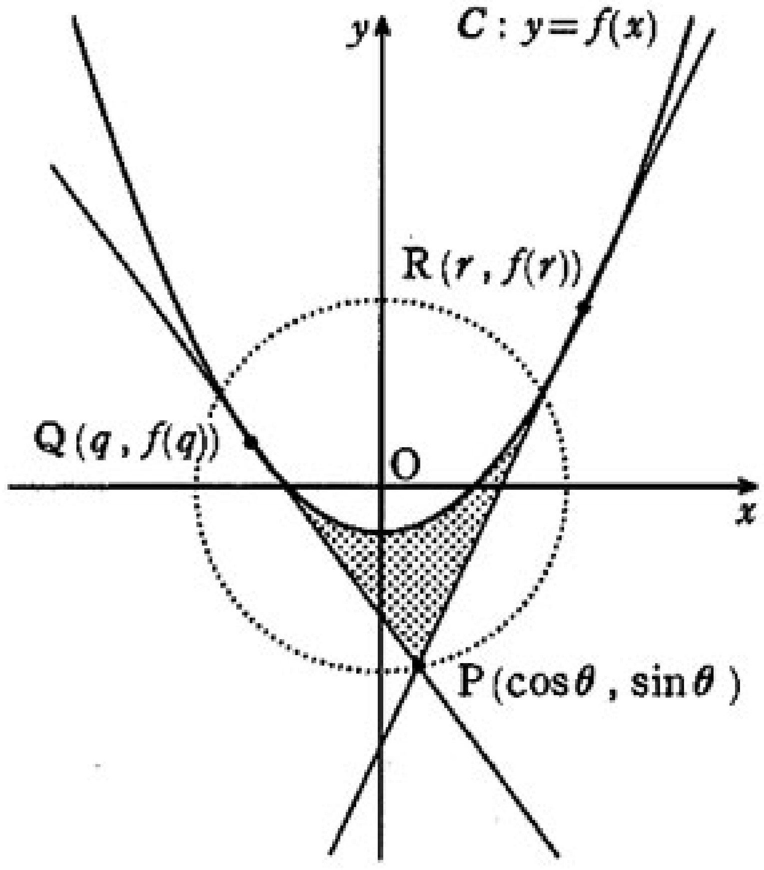
$$\sum_{k=1}^{44}k^2=\frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 89=29370 \ \cdots\cdots \ (答)$$

[Ⅲ]

(1) $y=x^2-\dfrac{1}{4}$ のとき $y'=2x$ だから，点 $\left(t,\ t^2-\dfrac{1}{4}\right)$ における C の接線の方程式は

$$y-\left(t^2-\frac{1}{4}\right)=2t(x-t)$$

すなわち　$y=2tx-t^2-\dfrac{1}{4}$ ……①



これが $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通るとすれば

$$\sin\theta=2t\cos\theta-t^2-\frac{1}{4}$$

すなわち　$t^2-2t\cos\theta+\sin\theta+\dfrac{1}{4}=0$ ……②

②が異なる２つの実数解をもてばよい。②の判別式を D とすれば

$$\begin{aligned}D&=4\cos^2\theta-4\left(\sin\theta+\frac{1}{4}\right)\\&=4(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta-1\\&=-4\sin^2\theta-4\sin\theta+3\end{aligned}$$

求める条件は　$D>0$

$$-4\sin^2\theta-4\sin\theta+3>0$$

$$4\sin^2\theta+4\sin\theta-3<0$$

$$(2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)<0$$

ゆえに　$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より求める θ の範囲は，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$ ……(答)

(2) ②の２解は　$x=\cos\theta\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta-\sin\theta+\dfrac{3}{4}}$ だから，

$$q=\cos\theta-\sqrt{-\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{3}{4}},\quad r=\cos\theta+\sqrt{-\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{3}{4}}$$

また，①より点Q，R における C の接線の方程式はそれぞれ

$$y=2qx-q^2-\frac{1}{4},\quad y=2rx-r^2-\frac{1}{4}$$

よって

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\int_q^{\cos\theta}\left\{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-\left(2qx-q^2-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{\cos\theta}^{r}\left\{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-\left(2rx-r^2-\frac{1}{4}\right)\right\}dx\\&=\int_q^{\cos\theta}(x^2-2qx+q^2)dx+\int_{\cos\theta}^{r}(x^2-2rx+r^2)dx\\&=\int_q^{\cos\theta}(x-q)^2dx+\int_{\cos\theta}^{r}(x-r)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-q)^3\right]_q^{\cos\theta}+\left[\frac{1}{3}(x-r)^3\right]_{\cos\theta}^{r}\\&=\frac{1}{3}(\cos\theta-q)^3-\frac{1}{3}(\cos\theta-r)^3\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{3}{4}}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{-\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{3}{4}}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\ \cdots\cdots(答)$$

(3)　$S(\theta)=\dfrac{2}{3}\left\{-\left(\sin\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2+1\right\}^{\frac{3}{2}}$

よって，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$，すなわち$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$のとき最大値$\dfrac{2}{3}$ ……(答)