$\boxed{1}$

(1)　(a) 正弦の加法定理より，

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \quad \cdots\cdots①$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B \quad \cdots\cdots②$$

であるから，$A+B=\alpha$，$A-B=\beta$ とおけば，

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\ B=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

となり，① − ② より，

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

が成り立つ．

(b) $\sin 2\theta=\sin 3\theta$ ……③ のとき，(a) の等式を用いると，

$$\sin 3\theta-\sin 2\theta=0 \qquad \therefore\quad 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=0$$

となるが，$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ であるから，③ を満たすのは，

$$\cos\frac{5\theta}{2}=0$$

の場合に限り，$0<\dfrac{5\theta}{2}<225^\circ$ であるから，③ を満たす θ は，

$$\frac{5\theta}{2}=90^\circ \qquad \therefore\quad \theta=36^\circ$$

である．

(2)　$\theta=36^\circ$ のとき，(1) (b) より，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ かつ $\sin\theta\neq 0$ が成り立ち，

$$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta \qquad \therefore\quad 2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$$

つまり，

$$2\cos\theta=3-4(1-\cos^2\theta) \qquad \therefore\quad 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$$

となるから，θ が鋭角であることより，$\cos\theta$ は 2 次方程式

$$4x^2-2x-1=0 \quad \cdots\cdots④$$

の正の解である．よって，

$$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

である．

(3) $\theta = 36^\circ$ とすると，

$$\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ = \sin 54^\circ \cdot \sin 66^\circ \sin 6^\circ$$

$$= \cos 36^\circ \cdot \frac{1}{2}\{\cos(66^\circ - 6^\circ) - \cos(66^\circ + 6^\circ)\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\theta(\cos 60^\circ - \cos 2\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta\left\{\frac{1}{2} - (2\cos^2\theta - 1)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(3\cos\theta - 4\cos^3\theta) = -\frac{1}{4}\cos 3\theta$$

となる．ここで，$3\theta = 108^\circ$ であり，これを新たに θ' とおくと，

$$5\theta' = 540^\circ$$

より，$\sin 2\theta' = \sin(540^\circ - 3\theta') = \sin 3\theta'$ となり，θ' も ③ を満たす．したがって，θ' が鈍角であることより，$\cos\theta'$ は ④ の負の解であるから，

$$\cos 3\theta = \cos\theta' = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

となる．以上により，

$$\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ = -\frac{1}{4}\cos 3\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{16}$$

である．

$\boxed{2}$

ルールによれば，コインを投げて表が i 回，裏が j 回出たとき，はじめの正方形は

縦の長さが 2^i ，横の長さが $2j+1$

の長方形となる．その面積は $2^i(2j+1)$ であり，0 以上の任意の整数 j に対して $2j+1$ は奇数であることに注意する．

また，コインを投げるごとに長方形の面積は増加する．

(1)　$k=80=2^4\cdot 5$ のとき．

$2^i(2j+1)=80$ を満たす i, j は $(i,j)=(4,2)$ に限る．よって，勝者となり得るのは 6 回目にコインを投げる後攻であり，後攻が勝つ確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64} $$

(2)　$k=40=2^3\cdot 5$ のとき．

$2^i(2j+1)=40$ を満たす i, j は $(i,j)=(3,2)$ に限る．よって，勝者となり得るのは 5 回目にコインを投げる先攻であり，後攻が勝つ確率は

$$ 0 $$

(3)　2 以上のいかなる自然数 k に対しても，k を素因数分解したときに含まれる素因数 2 の個数を i とすれば

$$ k=2^i(2j+1) $$

と一意的に表すことができる．ただし，i, j は k によって定まる 0 以上の整数である．

ここで，勝者となり得るのは，$i+j$ が奇数なら先攻，偶数なら後攻であるから，片方が勝つ確率は必ず 0 である．

このとき他方が勝つ確率は

$$ {}_{i+j}\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^j $$

であり，これは 0 ではない．

$\boxed{3}$

(1)　半径が 1 の円が x 軸上をすべることなく回転することにより，円が角 θ だけ回転したとき，最初 O の位置にあった円周上の定点 P と，x 軸と円の接点 A に対して，

$$\mathrm{OA} = \overset{\frown}{\mathrm{PA}} = 1 \cdot \theta = \theta$$

である．

(2)　円の中心を K とすると，$\overrightarrow{\mathrm{KP}}$ の向きから $\overrightarrow{\mathrm{KA}}$ の向きまで測った角の大きさは，円の回転角 θ である．

したがって，x 軸の正の向きから $\overrightarrow{\mathrm{KP}}$ の向きまで測った角は，$\dfrac{3\pi}{2} - \theta$ であり，このことから，

$$(x,\ y) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{KP}} = (\theta,\ 1) + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right),\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

すなわち，

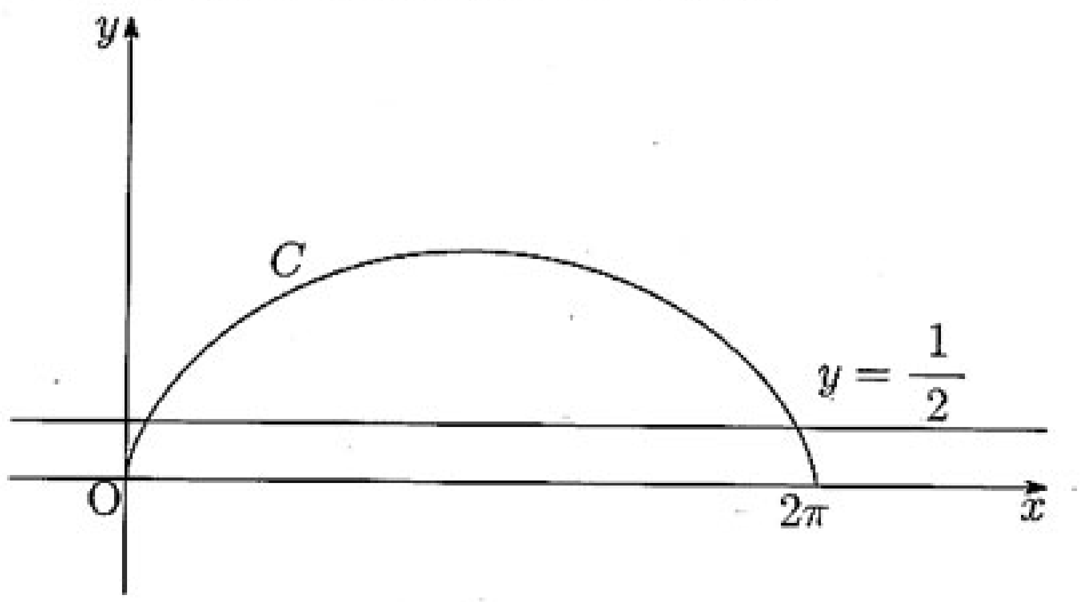
$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

である．

(3)　(2) より，

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta \geqq 0,\ y = 1 - \cos\theta$$

であるから，x は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で増加し，y は，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ では増加，$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ では減少する．これより，曲線 C は下図のようになる．



ここで，C と直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との交点は，$1 - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ より，$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}$ に対応する点であることから，その座標は，

$$\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

である．

である．

したがって，求める面積は，

$$\int_{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y-\frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}} y\,dx - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (1-\cos\theta)^2\,d\theta - \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta - \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta - \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta - \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} - \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\pi+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

である．

4

(1)　2つの病院のASTの値のデータを，それぞれ小さい順に並べかえると，

A病院：18，19，19，20，21，30，30，32，32，33，

36，37，38，41，43，43，44，50，64，70

B病院：19，24，24，30，34，35，42，43，46，48，54，63，65，74，80

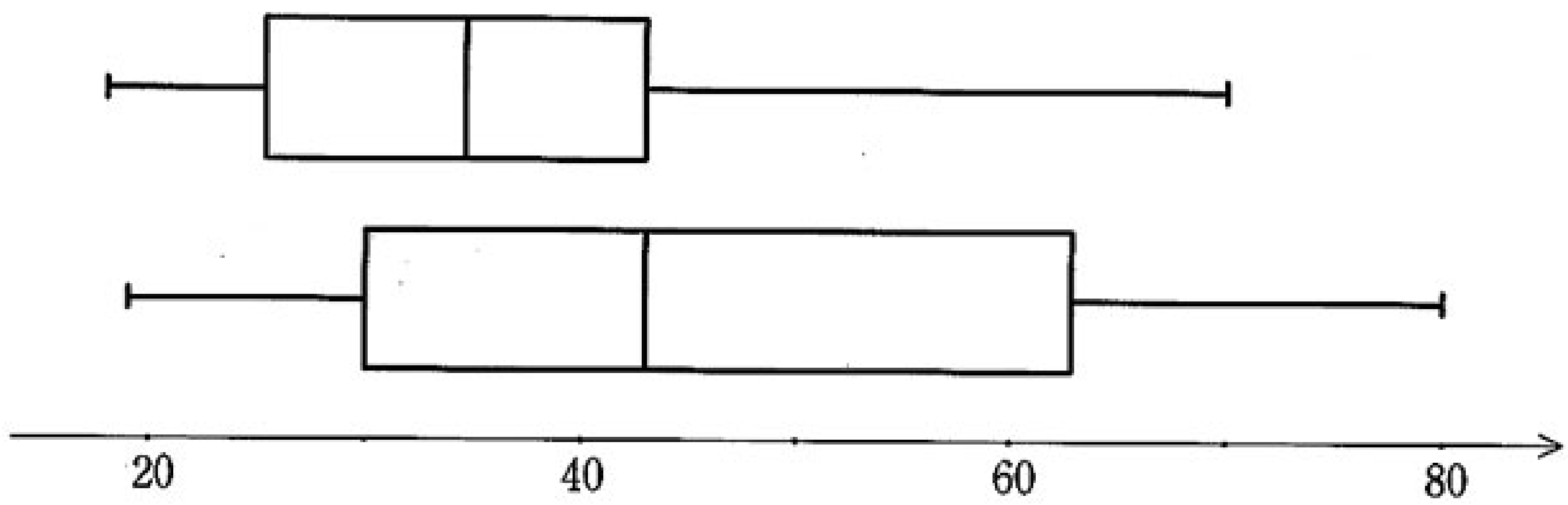
となる．

よって，A病院，B病院のデータの第k四分位数をそれぞれQ_k，Q_k' $(k=1,\ 2,\ 3)$とすると，

$$\text{A病院：}Q_1=\frac{21+30}{2}=25.5,\quad Q_2=\frac{33+36}{2}=34.5,\quad Q_3=\frac{43+43}{2}=43$$

$$\text{B病院：}Q_1'=30,\quad Q_2'=43,\quad Q_3'=63$$

となり，箱ひげ図を並べてかくと下のようになる．ただし，上側がA病院，下側がB病院である．



(2)　A病院の方がB病院よりもASTの値は小さい値に偏る傾向がある．このように判断できる理由は，A病院のデータの各四分位数が，それに対応するB病院のデータの四分位数よりも小さいこと，および，A病院のデータの四分位範囲がB病院のデータの四分位範囲よりも小さいこと，である．

(3)(a)　$z_i=\dfrac{x_i-\overline{x}}{s_x}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ からなるデータZについて，その平均値$\overline{z}$と標準偏差s_zの値は，

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\overline{x}}{s_x}=\frac{1}{s_x}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\right)=\frac{1}{s_x}(\overline{x}-\overline{x})=0$$

$$s_z=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s_x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{{s_x}^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{{s_x}^2}\cdot{s_x}^2}=1$$

である．

(b)　n 個の数値 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ からなるデータ X に対して，その基準範囲が m から M $(m<M)$ であるとする．このとき，

$$x_i'=\frac{x_i-\frac{m+M}{2}}{\frac{M-m}{2}}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\quad\cdots\cdots①$$

として得られる n 個の数値 $x_1',\ x_2',\ \cdots,\ x_n'$ からなるデータ X' を考えると，

x_i が基準範囲に含まれる

$\Leftrightarrow\quad m\leqq x_i\leqq M$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{m-\frac{m+M}{2}}{\frac{M-m}{2}}\leqq x_i'\leqq\frac{M-\frac{m+M}{2}}{\frac{M-m}{2}}$$

$\Leftrightarrow\quad -1\leqq x_i'\leqq 1$

となるから，①のような変換で得られた新しいデータが－1から1までに入るか否かで，正常と考えられるか否かが判断できるようになる．

したがって，集め方や基準が異なる2つの集団のデータに対して，それぞれ①の変換を行うことにより，同じ基準範囲「－1から1」を利用できるようになる．