〔1〕

(1) $f'(x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ であるから条件 (i) より，

$m=f'(0)=\dfrac{1}{3}\cdots\cdots$(答)

(2) 条件 (ii) より，

$$\frac{1}{6}(x-p)^2+q=\frac{1}{3}x$$
$$x^2-2(p+1)x+p^2+6q=0 \qquad \cdots ①$$

は重解をもつので，

$(p+1)^2-(p^2+6q)=0$

$\therefore q=\dfrac{1}{3}p+\dfrac{1}{6}\cdots\cdots$(答)

このときの ① の解は，解の公式より，$x=p+1$

これが点 A の x 座標である。直線 ℓ の式より y 座標も求めて，

$\mathrm{A}\left(p+1,\dfrac{p+1}{3}\right)\cdots\cdots$(答)

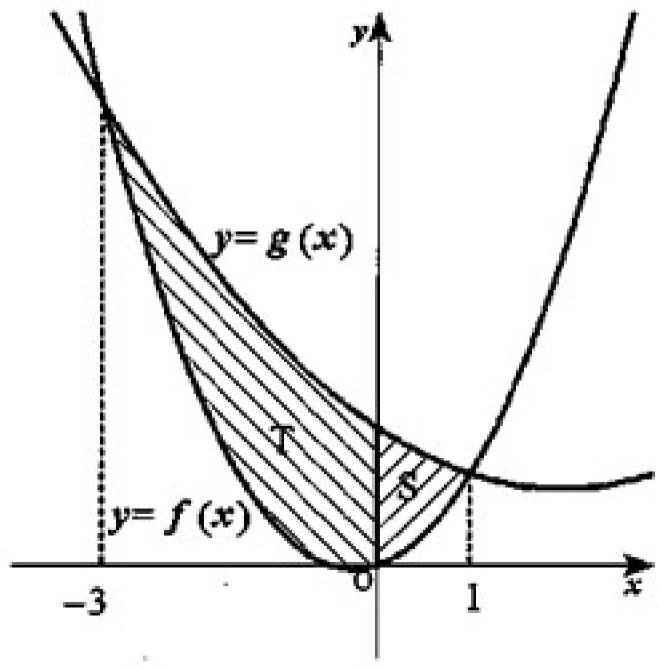
(3)

$$\begin{aligned} f(x)-g(x)&=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}(p+1)x-\frac{1}{6}p^2-q\\ &=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}(p+1)x-\frac{1}{6}p^2-\frac{1}{3}p-\frac{1}{6}\\ &=\frac{1}{6}(x+p+1)(3x-p-1) \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

よって，C_1 と C_2 の二つの共有点の x 座標は

$x=-p-1,\dfrac{p+1}{3}\cdots\cdots$(答)$\left(p\neq-1\text{ より，}-p-1\neq\dfrac{p+1}{3}\right)$

(4)



$p=2$ のとき ② より，
$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}(x+3)(x-1)$
であるから，
C_1 と C_2 の概形は右図のようになる。

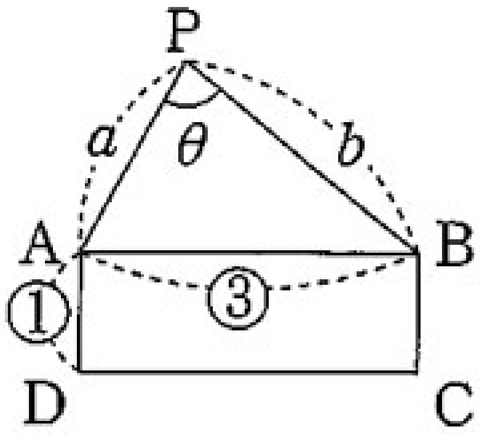
よって，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \{g(x)-f(x)\}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{6} \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{-3}^0 \{g(x)-f(x)\}\,dx \\
&= \int_{-3}^0 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-3}^0 \\
&= \frac{9}{2} \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

〔2〕

（1）



△PAB に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

AB > 0 であるから，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

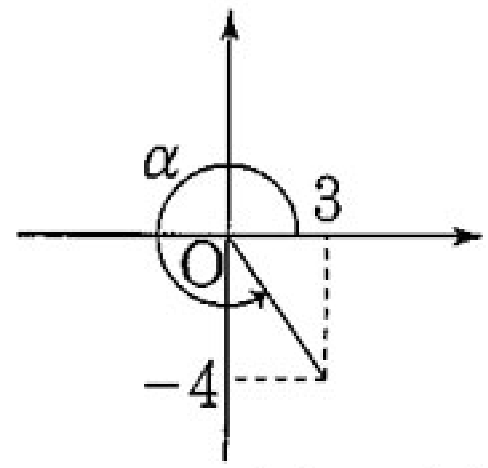
（2）

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{PAB} + (\text{長方形 ABCD}) \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \mathrm{AB}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{AB} \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\right) \quad (\because (1)\text{の結果}) \\ &= \frac{1}{6}\left\{2a^2 + 2b^2 + ab(3\sin\theta - 4\cos\theta)\right\} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

（3）（2）の結果より，

$$S = \frac{1}{6}\left\{2a^2 + 2b^2 + ab\cdot 5\sin(\theta + \alpha)\right\}$$

（ただし，αは右図の角）



と表され，$0 < \theta < \pi$ のとき，

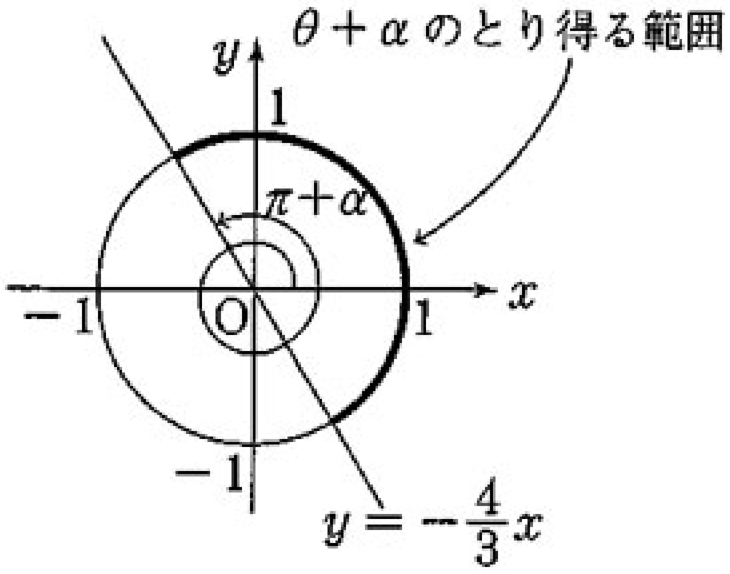
$$\alpha < \theta + \alpha < \pi + \alpha$$

であるから，

$\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi$ のときに $\sin(\theta + \alpha)$ は最大値 1

をとる．よって，

$$M = \frac{1}{6}\left(2a^2 + 2b^2 + 5ab\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$



$S = M$ のとき，$\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi$ であるから，

$$\beta = \frac{5}{2}\pi - \alpha$$

ゆえに，

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{3}{5} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\alpha = -\frac{4}{5} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

（4） $a = 16,\ b = 25,\ \theta = \beta$ のとき，（3）より，

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{4}{5} \\ \sin\theta = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} \mathrm{AB}=\sqrt{16^2+25^2-2\cdot16\cdot25\left(-\dfrac{4}{5}\right)}=39 & (\because(\mathbf{1})\text{の結果}) \\ \triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot16\cdot25\cdot\dfrac{3}{5}=120 \end{cases}$$

である．点 P と直線 AB の距離を d とおくと，

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d$$

であることに着目すれば，

$$120=\frac{1}{2}\cdot39d$$

$$\Longleftrightarrow d=\frac{80}{13}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

〔3〕

(1) 和が 7 となるさいころ 2 回の目の組み合わせは

$$\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}$$

である．(a_1, a_2) に対する順列を考えて，求める確率は

$$\frac{2!\times 3}{6^2}=\frac{1}{6}$$ …(答)

(2) $b_1=1$ となるのは，

- 1 回目にさいころの目が 1 で，硬貨は表裏どちらでもよい
- 1 回目にさいころの目が 1 以外で，硬貨は表

のいずれかであり，2 回目のさいころの目，硬貨の表裏は不問である．よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$$ …(答)

(3) 事象 A，B を次のように設定する．

A： $\overrightarrow{b}=(1,1)$ である
B： $\overrightarrow{a}=(1,6)$ である

A は，$b_1=1$ かつ $b_2=1$ であり，これらは互いに独立であり等確率なので (2) より

$$\mathrm{P(A)}=\left(\frac{7}{12}\right)^2$$

A ∩ B は，
「さいころを 2 回投げて順に 1，6 の目が出て硬貨を 2 回投げたとき 1 回目は表裏どちらでもよく，2 回目は表が出る場合」
なので，

$$\mathrm{P(A\cap B)}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

である．よって A のもとで B が起こる条件付き確率は

$$\mathrm{P_A(B)}=\frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{7}{12}\right)^2}=\frac{2}{49}$$ …(答)

(4) 同様に考えると，$k=1,2$ に対し

- $a_k=1$ ならば，硬貨の表裏にかかわらず $b_k=1$ である
- $a_k\neq 1$ ならば，k 回目に投げた硬貨が表なら $b_k=1$，裏なら $b_k\neq 1$ である

ことに注意する．
事象 C を

C： $a_1+a_2=7$ である

とすると，A∩C は

「2 回のさいころの目の組み合わせが (1) の 3 種類で，それぞれにおける $a_k \neq 1$ に対し k 回目の硬貨で表が出る場合」

である．よって，$\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}$ の順に考えて

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 2!\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 2!$$

であるから，A のもとで C が起こる条件付き確率は

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 2!}{\left(\frac{7}{12}\right)^2}=\frac{8}{49}\qquad\cdots(答)$$

〔4〕

(1) 条件 (ii) より，$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ において，

$$a_{2n}=-a_{2n-1}+1, \quad a_{2n+1}=-2a_{2n}+3 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。条件 (i) より，$a_1=1$ であるから，

$$a_2=-a_1+1=0$$

$$a_3=-2a_2+3=3$$

$$a_4=-a_3+1=-2$$

$$a_5=-2a_4+3=7$$

したがって，$\boldsymbol{a_2=0,\ a_3=3,\ a_4=-2,\ a_5=7}$ ……(答)

(2) ① より，

$$a_{2n+1}=-2a_{2n}+3=-2(-a_{2n-1}+1)+3=2a_{2n-1}+1$$

$$a_{2n+2}=-a_{2n+1}+1=-(-2a_{2n}+3)+1=2a_{2n}-2$$

よって，$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$ に対して，$b_1=a_1=1$，$c_1=a_2=0$ であり，

$$b_{n+1}=2b_n+1, \quad c_{n+1}=2c_n-2 \qquad \cdots\cdots ②$$

である。② より，

$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

$$c_{n+1}-2=2(c_n-2)$$

である。$\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n+1=2\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore\ b_n=2^n-1$$

また，$\{c_n-2\}$ は初項 $c_1-2=-2$，公比 2 の等比数列であるから，

$$c_n-2=(-2)\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore\ c_n=2-2^n$$

したがって，$\boldsymbol{b_n=2^n-1,\ c_n=2-2^n}$ ……(答)

(3)

$$\begin{aligned}
T_m &= \sum_{k=1}^{2m-1} a_k \\
&= a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{2m-2}+a_{2m-1} \\
&= b_1+c_1+b_2+c_2+\cdots\cdots+c_{m-1}+b_m \\
&= \sum_{k=1}^{m-1}(b_k+c_k)+b_m \qquad (\text{ただし，} m \geqq 2) \\
&= \sum_{k=1}^{m-1}\left\{(2^k-1)+(2-2^k)\right\}+(2^m-1) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m-1} 1\right)+(2^m-1) \\
&= 2^m+m-2
\end{aligned}$$

また，$T_1=b_1=1$ より，$m \geqq 1$ に対して，$\boldsymbol{T_m=2^m+m-2}$ ……(答)