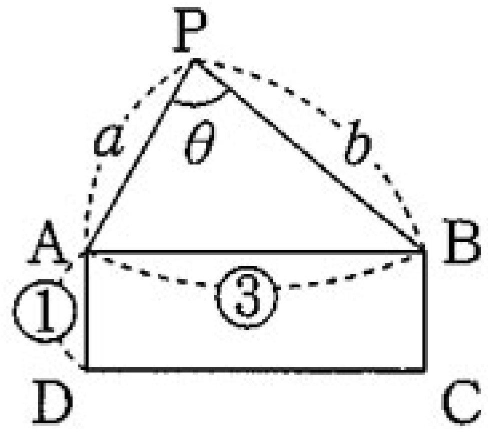
〔1〕

（1）



$\triangle$PAB に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

AB > 0 であるから，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

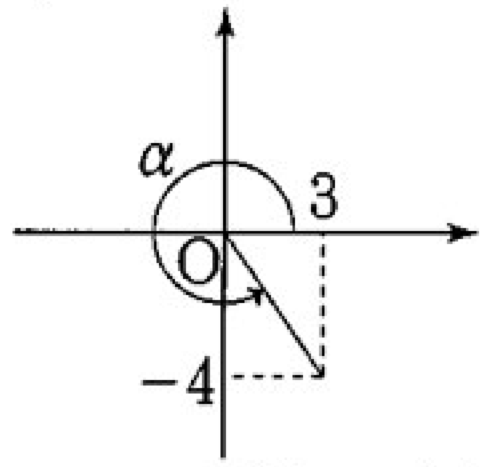
（2）

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{PAB} + (\text{長方形 ABCD}) \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \mathrm{AB}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{AB} \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \quad (\because (1)\text{の結果}) \\ &= \frac{1}{6}\{2a^2 + 2b^2 + ab(3\sin\theta - 4\cos\theta)\} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

（3）（2）の結果より，

$$S = \frac{1}{6}\{2a^2 + 2b^2 + ab\cdot 5\sin(\theta + \alpha)\}$$

（ただし，αは右図の角）



と表され，$0 < \theta < \pi$ のとき，

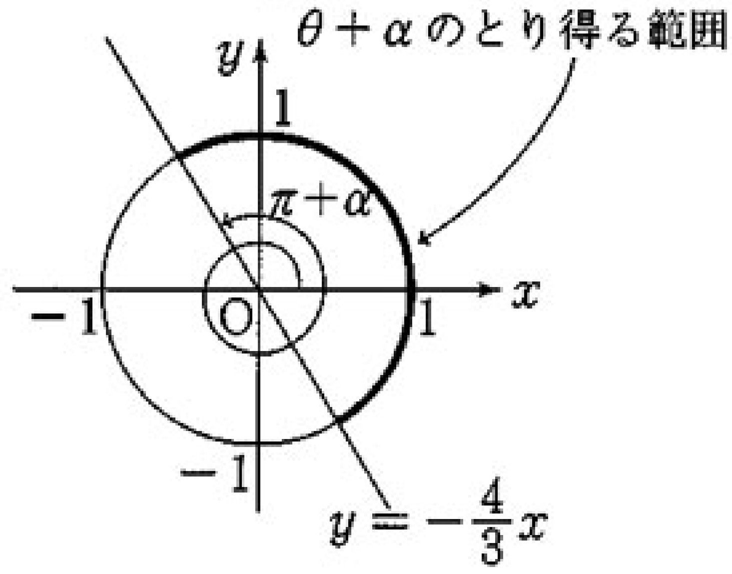
$$\alpha < \theta + \alpha < \pi + \alpha$$

であるから，

$\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi$ のときに $\sin(\theta + \alpha)$ は最大値 1

をとる．よって，

$$M = \frac{1}{6}(2a^2 + 2b^2 + 5ab) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$



$S = M$ のとき，$\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi$ であるから，

$$\beta = \frac{5}{2}\pi - \alpha$$

ゆえに，

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{3}{5} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\alpha = -\frac{4}{5} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

（4）$a = 16$, $b = 25$, $\theta = \beta$ のとき，（3）より，

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{4}{5} \\ \sin\theta = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

© 駿台予備学校

であるから,

$$\begin{cases} \mathrm{AB}=\sqrt{16^2+25^2-2\cdot16\cdot25\left(-\frac{4}{5}\right)}=39 \quad (\because (\,1\,)\text{の結果}) \\ \triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot16\cdot25\cdot\frac{3}{5}=120 \end{cases}$$

である. 点Pと直線ABの距離を d とおくと,

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d$$

であることに着目すれば,

$$120=\frac{1}{2}\cdot39d$$

$$\Longleftrightarrow d=\frac{80}{13} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

© 駿台予備学校

〔2〕

（1） $z \neq -1$ のとき，$w=\dfrac{z-i}{z+1}$ より

$(z+1)w=z-i$

$(w-1)z=-w-i$

ここで，$w=1$ とすると，(左辺)$=0\cdot z$，(右辺)$=-1-i$ となり，矛盾.

したがって，仮定が誤りであり，$w \neq 1$ （証明終わり）

よって，$z=\dfrac{-w-i}{w-1}$ …(答)

（2） 点 z が直線 ℓ_t 上を動くとき，

(z の実部)$=\dfrac{z+\overline{z}}{2}=t$

$\therefore\ z+\overline{z}=2t$

（1）の結果を代入して　$\dfrac{-w-i}{w-1}+\dfrac{-\overline{w}+i}{\overline{w}-1}=2t$

$$\begin{cases}(-w-i)(\overline{w}-1)+(-\overline{w}+i)(w-1)=2t(w-1)(\overline{w}-1) & \cdots② \\ w \neq 1 & \cdots③\end{cases}$$

② より，$-w\overline{w}+w-i\overline{w}+i-w\overline{w}+iw+\overline{w}-i=2t(w\overline{w}-w-\overline{w}+1)$

$2(t+1)w\overline{w}-(2t+1+i)w-(2t+1-i)\overline{w}+2t=0$

$t \neq -1$ より，$w\overline{w}-\dfrac{2t+1+i}{2(t+1)}w-\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}\overline{w}+\dfrac{t}{t+1}=0$

$$\left(w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\right)\left(\overline{w}-\frac{2t+1+i}{2(t+1)}\right)=\frac{(2t+1)^2+1}{2^2(t+1)^2}-\frac{t}{t+1}$$

$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|^2=\frac{(4t^2+4t+2)-4t(t+1)}{4(t+1)^2}$$

$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|^2=\frac{1}{2(t+1)^2}$$

$$\therefore\ \left|w-\frac{2t+1-i}{2(t+1)}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}|t+1|}\ \cdots②'$$

よって，点 w の描く軌跡は ②′ かつ ③ より

点 $\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$ の円 S_t のうち，点 1 を除いた部分

となり，その中心 P_t に対応する複素数は　$\dfrac{2t+1-i}{2(t+1)}$ …(答)

（3） 点 P_t に対応する複素数を $x+yi$ (x, y：実数) とすると，

$x=\dfrac{2t+1}{2(t+1)}$ …②，$y=\dfrac{-1}{2(t+1)}\ (\neq 0)$ …③

② ÷ ③ より，$\dfrac{x}{y}=-(2t+1)$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{y}-1\right)=\dfrac{-x-y}{2y}$

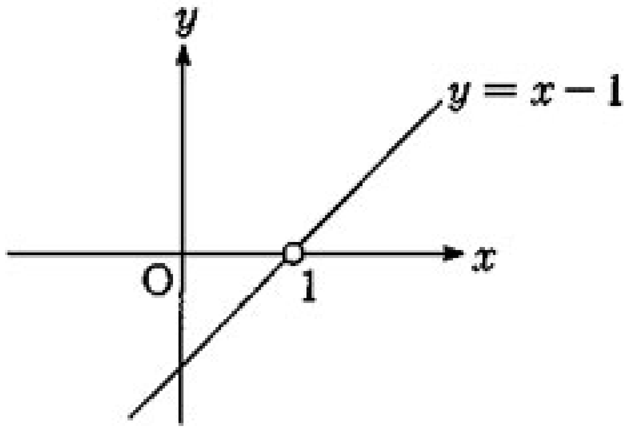
これを ③：$2y(t+1)=-1$ に代入して

$$2y\left(\frac{-x-y}{2y}+1\right)=-1$$

© 駿台予備学校

$$-x-y+2y=-1 \text{ かつ } y \neq 0$$

$$\therefore\ y=x-1 \text{ かつ } y \neq 0$$



よって，t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形は図のような直線（点 1 を除く）…(答)
となる．

© 駿台予備学校

〔３〕

(1) $f(x)=xe^{-2x^2}$

$$f'(x)=1\cdot e^{-2x^2}+x\cdot\left(-4xe^{-2x^2}\right)=(1-4x^2)e^{-2x^2}=4\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2x^2}$$

より，$f(x)$の増減は下表に従う．

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	↗	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	↘

よって，$f(x)$は，

$x=\frac{1}{2}$ …(答) のとき，極大値 $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ …(答)

$x=-\frac{1}{2}$ …(答) のとき，極小値 $-\frac{1}{2\sqrt{e}}$ …(答)

をとる．

(2) 曲線$y=f(x)$ $(f'(x)=(1-4x^2)e^{-2x^2})$上の点$(t,\ f(t))$における接線

$$\ell_t\ :\ y-te^{-2t^2}=(1-4t^2)e^{-2t^2}(x-t)$$

がA$(a,\ 0)$を通る条件は

$$0-te^{-2t^2}=(1-4t^2)e^{-2t^2}(a-t)$$

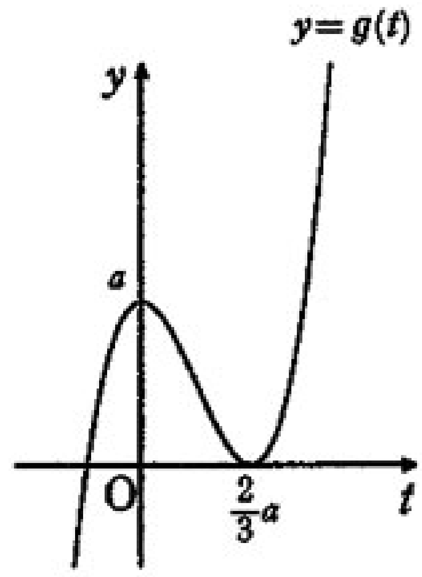
$$\Leftrightarrow\quad 4t^3-4at^2+a=0\quad (\because\ e^{-2t^2}>0)$$

この左辺を$g(t)$とおくと

$$g'(t)=12t^2-8at=12t\left(t-\frac{2}{3}a\right)$$

より，$a>0$に注意すれば$g(t)$の増減は下表に従う．

t		0		$\frac{2}{3}a$	
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	a	↘	$-\frac{16}{27}a^3+a$	↗



よって，ℓ_tが点Aを通るような実数tが二つある条件は，
$g(t)=0$が異なる二つの実数解をもつことだから

$$g\left(\frac{2}{3}a\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad -\frac{16}{27}a^3+a=0\quad\Leftrightarrow\quad a^2=\frac{27}{16}\quad(\because\ a>0)$$

© 駿台予備学校

$$\therefore \quad a=\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \cdots (答)$$

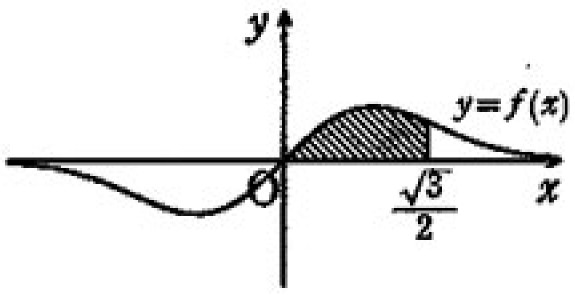
このとき，

$$g(t)=0 \iff 4t^3-3\sqrt{3}\,t^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}=0 \iff (4t+\sqrt{3})\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$$

だから

$$p=-\frac{\sqrt{3}}{4},\quad q=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots (答)$$

(3)　(1)より $y=f(x)$ のグラフは右図のようになるから求める面積は



$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} xe^{-2x^2}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right) \quad \cdots (答)$$

© 駿台予備学校

〔4〕

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{n}$ ……（答）

(2) $\left|\sin n\left(x+\dfrac{\pi}{n}\right)\right| = |\sin nx|$ だから，$y=|\sin nx|$ は周期が $\dfrac{\pi}{n}$ の周期関数である。

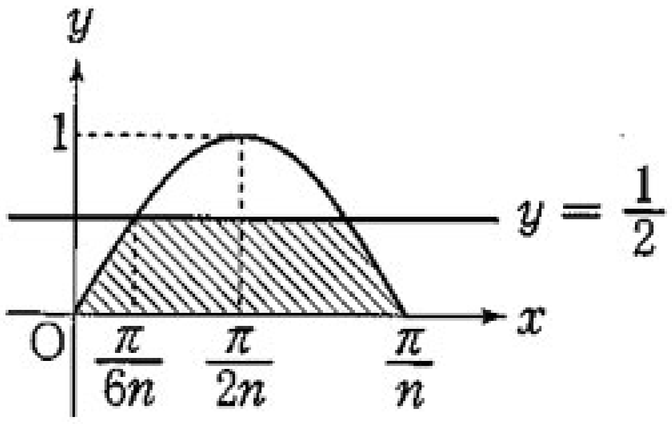
また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{n}$ において，$\sin nx \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin nx|\,dx &= n\int_0^{\frac{\pi}{n}} |\sin nx|\,dx\\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx\\ &= 2 \text{ ……（答）}(\because (1))\end{aligned}$$

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{n}$ において，$y=|\sin nx|$ は $x=\dfrac{\pi}{2n}$ に関して対称である。

また，$\sin nx = \dfrac{1}{2}$ を満たす x は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2n}$ のとき，$x=\dfrac{\pi}{6n}$

よって，求める体積は



$$\begin{aligned}&2n\left\{\int_0^{\frac{\pi}{6n}} \pi\sin^2 nx\,dx + \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3n}\right\}\\ &= 2n\left\{\pi\int_0^{\frac{\pi}{6n}} \frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx + \frac{\pi^2}{12n}\right\}\\ &= 2n\left\{\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_0^{\frac{\pi}{6n}} + \frac{\pi^2}{12n}\right\}\\ &= \frac{\pi^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi \text{ ……（答）}\end{aligned}$$

(4) 求める体積は

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} \pi\{\sqrt{x}|\sin nx|\}^2\,dx\\ &= \pi\int_0^{\pi} x\sin^2 nx\,dx\\ &= \pi\int_0^{\pi} x\cdot\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx\\ &= \pi\left\{\left[x\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4n}\sin 2nx\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4n}\sin 2nx\right)dx\right\}\\ &= \pi\left\{\frac{\pi^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8n^2}\cos 2nx\right]_0^{\pi}\right\}\\ &= \frac{\pi^3}{4} \text{ ……（答）}\end{aligned}$$

© 駿台予備学校

〔5〕

(1) 和が 7 となるさいころ 3 回の目の組み合わせは

$$\{1,1,5\}, \{1,2,4\}, \{1,3,3\}, \{2,2,3\}$$

である．(a_1, a_2, a_3) に対する順列を考えて，求める確率は

$$\frac{\frac{3!}{2!} \times 3 + 3!}{6^3} = \frac{5}{72} \qquad \cdots(答)$$

(2) $b_1 = 1$ となるのは，

- 1 回目にさいころの目が 1 で，硬貨は表裏どちらでもよい
- 1 回目にさいころの目が 1 以外で，硬貨は表

のいずれかであり，2 回目，3 回目のさいころの目，硬貨の表裏は不問である．よって，求める確率は

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \qquad \cdots(答)$$

(3) 事象 A，B を次のように設定する．

A： $\overrightarrow{b} = (1,1,1)$ である
B： $\overrightarrow{a} = (1,1,5)$ である

A は，$b_1 = 1$ かつ $b_2 = 1$ かつ $b_3 = 1$ であり，これらは互いに独立であり等確率なので (2) より

$$\mathrm{P(A)} = \left(\frac{7}{12}\right)^3$$

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ は，
「さいころを 3 回投げて順に 1，1，5 の目が出て硬貨を 3 回投げたとき 1 回目，2 回目は表裏どちらでもよく，3 回目は表が出る場合」
なので，

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{1}{2}$$

である．よって A のもとで B が起こる条件付き確率は

$$\mathrm{P_A(B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{7}{12}\right)^3} = \frac{4}{343} \qquad \cdots(答)$$

(4) 同様に考えると，$k = 1, 2, 3$ に対し

- $a_k = 1$ ならば，硬貨の表裏にかかわらず $b_k = 1$ である
- $a_k \neq 1$ ならば，k 回目に投げた硬貨が表なら $b_k = 1$，裏なら $b_k \neq 1$ である

ことに注意する．
事象 C を

C： $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である

©駿台予備学校

とすると，A∩C は
「3 回のさいころの目の組み合わせが (1) の 4 種類で，それぞれにおける $a_k \neq 1$ に対し k 回目の硬貨で表が出る場合」
である．よって，$\{1,1,5\},\{1,2,4\},\{1,3,3\},\{2,2,3\}$ の順に考えて

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left\{\frac{3!}{2!}\times\frac{1}{2}+3!\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{33}{8}$$

であるから，A のもとで C の起こる条件付き確率は

$$\mathrm{P_A}(\mathrm{C})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{33}{8}}{\left(\frac{7}{12}\right)^3}=\frac{33}{343}$$ $\cdots$(答)

© 駿台予備学校