2020年度 一橋大学 前期 数学

$\boxed{1}$

以下，合同式の法は 2020 とする．

(1) $10^1 \equiv 10$， $10^2 \equiv 100$， $10^3 \equiv 1000$， $10^4 = 10000 \equiv 1920$， $10^5 = 10 \cdot 10^4 \equiv 19200 \equiv 1020$，

$$10^6 = 10 \cdot 10^5 \equiv 10200 \equiv 100$$

であり，n を 2 以上の整数とするとき，

$$10^{n+4} - 10^n = 10^{n-2}(10^6 - 10^2) = 10^{n-2} \cdot 999900 = 10^{n-2} \cdot 495 \cdot 2020 \qquad \therefore \quad 10^{n+4} \equiv 10^n$$

が成り立つ．したがって，10^n を 2020 で割った余りは，$n \geqq 2$ のとき，100，1000，1920，1020 を繰り返し，

$$10^n \equiv \begin{cases} 10 & (n=1\text{のとき}) \\ 100 & (n=4k-2\text{のとき}) \\ 1000 & (n=4k-1\text{のとき}) \\ 1920 & (n=4k\text{のとき}) \\ 1020 & (n=4k+1\text{のとき}) \end{cases} \quad (k\text{ は正の整数}) \cdots\cdots(*)$$

となる．

$10 = 4 \cdot 3 - 2$ であることから，$(*)$より，10^{10} を 2020 で割った余りは 100 である． ……(答)

(2) 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるものを X とすると，X は，

(i) $X = 2 \cdot 10^{99}$　　(ii) $X = 1 \cdot 10^{99} + 1 \cdot 10^l$（$l$ は 0 以上 98 以下の整数）

のいずれかの形で表せる．

(i)の場合

$99 = 4 \cdot 25 - 1$ および$(*)$より，$10^{99} \equiv 1000$ であるから，

$$X = 2 \cdot 10^{99} \equiv 2 \cdot 1000 = 2000$$

となり，X は 2020 で割り切れない．

(ii)の場合

$(*)$より，

$$X = 1 \cdot 10^{99} + 1 \cdot 10^l \equiv 1000 + 10^l$$

となるから，X が 2020 で割り切れるのは $10^l \equiv 1020$ のときであり，それは，$(*)$より，$l = 4k+1$（k は正の整数）のときである．$0 \leqq l \leqq 98$ より，

$$0 \leqq 4k+1 \leqq 98 \qquad \therefore \quad -\frac{1}{4} \leqq k \leqq \frac{97}{4}$$

であり，k は正の整数であるから，$1 \leqq k \leqq 24$ となる．

以上から，100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち，2020 で割り切れるものの個数は，24 個である． ……(答)

$\boxed{2}$

　$\tan\theta$，$\tan 2\theta$ が定義されることから，

$$\theta \fallingdotseq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \quad \cdots\cdots①$$

である．以下，

$$0 \leqq \theta < \pi \quad \cdots\cdots②$$

かつ①の範囲で考える．このとき，$\tan\theta \fallingdotseq \pm 1$ であり，

$$\begin{aligned}\tan 2\theta + a\tan\theta = 0 &\iff \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + a\tan\theta = 0\\ &\iff \tan\theta\left(\frac{2}{1-\tan^2\theta} + a\right) = 0\\ &\iff \tan\theta = 0 \ \cdots\cdots③ \ \text{または} \ \frac{2}{1-\tan^2\theta} + a = 0 \ \cdots\cdots④\end{aligned}$$

となる．

　$\tan\theta \fallingdotseq \pm 1$ のとき，$\tan\theta$ の値から①かつ②を満たす θ の値がただ1つに定まり，$\tan\theta$ の値が異なれば θ の値が異なる．したがって，求める θ の個数は，③または④を満たす異なる $\tan\theta$ の個数に等しい．

$$④ \iff a = \frac{2}{\tan^2\theta - 1} \iff a(\tan^2\theta - 1) = 2 \ \cdots\cdots④'$$

である．$a=0$ のとき，④′は成り立たない．また，$a \fallingdotseq 0$ のとき，

$$④' \iff \tan^2\theta - 1 = \frac{2}{a} \iff \tan^2\theta = \frac{2}{a} + 1$$

となる．よって，④を満たす $\tan\theta$ の値で③以外のものの個数は，

$\dfrac{2}{a} + 1 > 0$ のとき，2個

$a=0$ または $\dfrac{2}{a} + 1 \leqq 0$ のとき，0個

となる．

$$\frac{2}{a} + 1 > 0 \iff \frac{a+2}{a} > 0 \iff (a+2)a > 0 \iff a < -2 \text{ または } a > 0$$

$$a = 0 \text{ または } \frac{2}{a} + 1 \leqq 0 \iff -2 \leqq a \leqq 0$$

である．

　以上から，求める個数は，

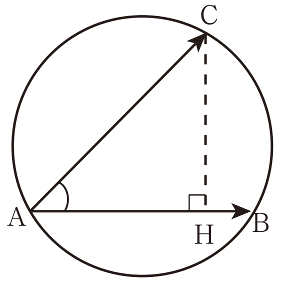
$$\begin{cases} a < -2 \text{ または } a > 0 \text{ のとき，3個} \\ -2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき，1個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

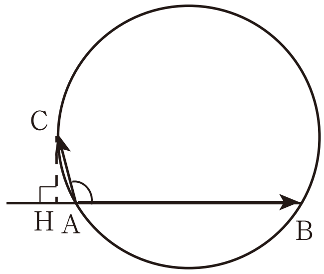
である．

$\boxed{3}$

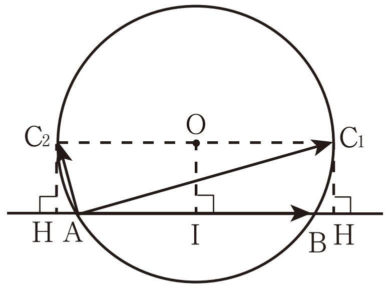
まず，2点A，Bを固定してCを動かして，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の最大値，最小値を考察する．

CからABに下ろした垂線の足をHとすると，





$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\begin{cases}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH} & (\angle\mathrm{BAC}\text{が鋭角のとき}) \quad\cdots\cdots①\\ -\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH} & (\angle\mathrm{BAC}\text{が}90^\circ\text{ 以上のとき}) \quad\cdots\cdots②\end{cases}$$



であるから，右図のように，円の中心Oを通りABと平行な直線と円との交点を$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は$\mathrm{C}=\mathrm{C_1}$のとき最大となり，$\mathrm{C}=\mathrm{C_2}$のとき最小となる．

OからABに下ろした垂線の足をIとし，$\mathrm{AB}=2x$とおく．

$\mathrm{C}=\mathrm{C_1}$のとき，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AI}+\mathrm{IH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}+\mathrm{OC_1}=x+1$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の最大値は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH}=2x(x+1)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdots\cdots③$$

となる．また，$\mathrm{C}=\mathrm{C_2}$のとき，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{IH}-\mathrm{IA}=\mathrm{OC_2}-\frac{1}{2}\mathrm{AB}=1-x$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の最小値は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH}=-2x(1-x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdots\cdots④$$

となる．

次に，A，Bを動かして，③の最大値，④の最小値を求める．xのとる値の範囲は$0\leqq x\leqq 1$である．

③は，$x=1$のとき最大となるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の最大値は，4である　……(答)

④は，$x=\frac{1}{2}$のとき最小となるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の最小値は，$-\frac{1}{2}$である．　……(答)

$\boxed{4}$

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}|t-x|\,dt$$

$$|t-x|=\begin{cases}-(t-x) & (t\leqq x\text{のとき})\\ t-x & (t\geqq x\text{のとき})\end{cases}$$

である．t の関数 $t-x$ の原始関数の 1 つを $G(t)=\dfrac{1}{2}(t-x)^2$ とおくと，

$$G(x)=0,\quad G(2+x)=2,\quad G(2-x)=\frac{1}{2}(2-2x)^2=2x^2-4x+2$$

である．

(i)　$x\leqq 2-x$　すなわち　$(0<)x\leqq 1$　のとき

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}(t-x)\,dt=\frac{1}{x}\cdot\Big[G(t)\Big]_{2-x}^{2+x}$$

$$=\frac{1}{x}\Big\{G(2+x)-G(2-x)\Big\}=\frac{1}{x}(-2x^2+4x)$$

$$=-2x+4$$

となる．よって，$F(x)$は $0<x\leqq 1$ において減少し，$x=1$のときに $F(x)$は最小となり，最小値は $F(1)=2$である．

(ii)　$2-x\leqq x$　すなわち　$1\leqq x$　のとき

$$F(x)=\frac{1}{x}\left[\int_{2-x}^{x}\{-(t-x)\}dt+\int_{x}^{2+x}(t-x)dt\right]=\frac{1}{x}\Big\{\Big[-G(t)\Big]_{2-x}^{x}+\Big[G(t)\Big]_{x}^{2+x}\Big\}$$

$$=\frac{1}{x}\Big\{G(2-x)+G(2+x)-2G(x)\Big\}=\frac{1}{x}(2x^2-4x+4)$$

$$=2\left(x+\frac{2}{x}-2\right)$$

(相加平均) $\geqq$ (相乗平均)の不等式から，

$$x+\frac{2}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$$

であるから，

$$F(x)=2\left(x+\frac{2}{x}-2\right)\geqq 2(2\sqrt{2}-2)=4(\sqrt{2}-1)$$

であり，等号は，$x=\dfrac{2}{x}$ かつ $x\geqq 1$　すなわち　$x=\sqrt{2}$ のときに成立する．したがって，$1\leqq x$　における $F(x)$ の最小値は $F(\sqrt{2})=4(\sqrt{2}-1)$ である．

(i)，(ii)より，$F(x)$の最小値は，$4(\sqrt{2}-1)$ である．　……(答)

$\boxed{5}$

点の合計がちょうど $n+2$ となるのは,

「１回目の試行で表が出て，２回目以降の点の合計がちょうど $n+1$ になる」

または

「１回目の試行で裏が出て，２回目以降の点の合計がちょうど n になる」

のいずれかの場合であるから,

$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ.

(1)　p_1 は１回の試行で表が出る確率であるから，$p_1=\dfrac{1}{2}$ である.　……(答)

p_2 は「2 回の試行でともに表が出る」または「1 回の試行で裏が出る」のいずれかが起こる確率であるから,

$$p_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

また，①より,

$$p_3=\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{2}p_1=\frac{5}{8},\quad p_4=\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{2}p_2=\frac{11}{16} \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2)　①より,

$$p_{n+2}-p_{n+1}=\left(\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n\right)-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)$$

となるから，$\{p_{n+1}-p_n\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であり，$p_1=\dfrac{1}{2}$，$p_2=\dfrac{3}{4}$ より,

$$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となる．よって,

$$|p_{n+1}-p_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となるから，$|p_{n+1}-p_n|<0.01$ となる条件は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<0.01 \qquad \therefore\quad 2^{n+1}>100$$

となる．$2^6=64$，$2^7=128$ であるから，求める最小の n は，$n=6$ である.　……(答)