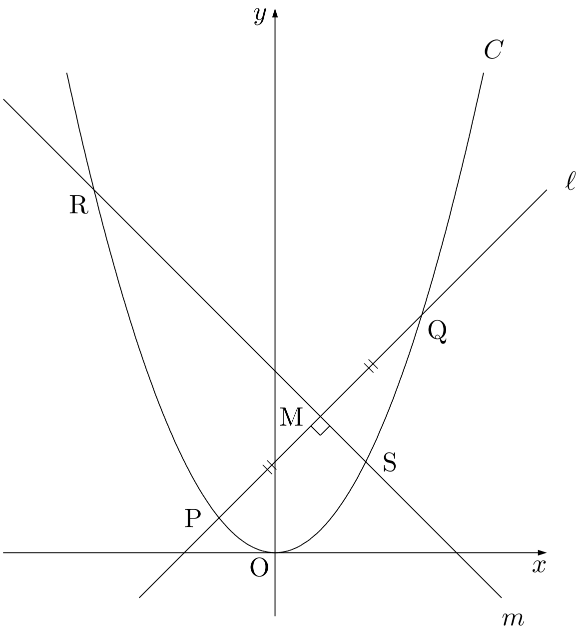
2020年度 北海道大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$



(1) ℓ と C の交点の x 座標は, x の 2 次方程式

$$x^2 = kx + 1$$

$$\therefore\ x^2 - kx - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の実数解である．ここで, ①の判別式を D_1 とすると, すべての正の実数 k に対して

$$D_1 = k^2 + 4 > 0$$

であるから, ①はつねに異なる 2 つの実数解をもつ．P, Q の x 座標をそれぞれ p, q $(p < q)$ とすると, p, q は①の 2 解である．$\mathrm{M}(x, y)$ とすると, 解と係数の関係を用いて

$$x = \frac{p+q}{2} = \frac{k}{2}$$

であり, M は ℓ 上にあるから

$$y = k \cdot \frac{k}{2} + 1 = \frac{k^2}{2} + 1$$

である．したがって, M の座標は

$$\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2}{2} + 1\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) m は M を通り, 傾きが $-\dfrac{1}{k}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{k}{2}\right) + \frac{k^2}{2} + 1$$

$$\therefore\ y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2+3}{2}$$

である．m と C の交点の x 座標は, x の 2 次方程式

$$x^2 = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2+3}{2}$$

$$\therefore\ x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{k^2+3}{2} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

の実数解である．ここで, ②の判別式を D_2 とすると, すべての正の実数 k に対して

$$D_2=\frac{1}{k^2}+2(k^2+3)>0$$

であるから, ②はつねに異なる 2 つの実数解をもつ．R, S の x 座標をそれぞれ r, s $(r<s)$ とすると, r, s は②の 2 解である．$\mathrm{N}(X, Y)$ とすると, 解と係数の関係を用いて

$$X=\frac{r+s}{2}=-\frac{1}{2k}$$

であり, N は m 上にあるから

$$Y=-\frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{1}{2k}\right)+\frac{k^2+3}{2}=\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2k^2}+\frac{3}{2}$$

である．$k^2>0$ であるから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2k^2}\geqq 2\sqrt{\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{2k^2}}=1$$

が成り立つので

$$Y\geqq\frac{5}{2}$$

である．また, 等号は $\dfrac{k^2}{2}=\dfrac{1}{2k^2}$, すなわち, $k=1$ のときに成り立つ．したがって, N の y 座標が最小となる k の値は

$$k=1$$ ……(答)

である．このとき, ①は $x^2-x-1=0$ となり, これを解くと $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ である．$k=1$ より, $\mathrm{P}(p, p+1)$, $\mathrm{Q}(q, q+1)$ であるから, P と Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\quad\mathrm{Q}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$ ……(答)

である．

$\boxed{2}$

(1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ より

$$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-\sin 2\theta$$

であるから

$$\sin 2\theta=1-t^2$$

である. よって

$$f(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t^2)-t$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2) $$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

であり, $0\leqq\theta\leqq\pi$ より

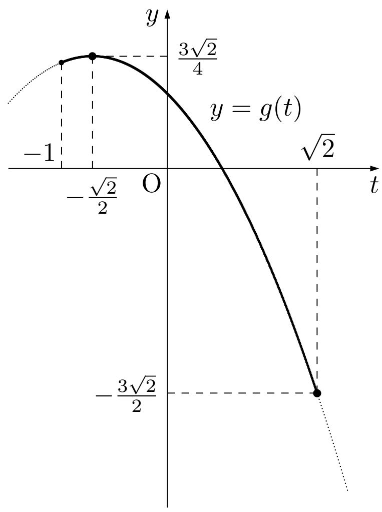
$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi \qquad \cdots\cdots ②$$

であるから, t のとりうる値の範囲は

$$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

である. $g(t)=f(\theta)$ とすると

$$g(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{4}$$



であるから, 最大値は $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 最小値は $g(\sqrt{2})=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ である.

また, $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

であるから, ②より

$$\theta-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6},\ すなわち,\ \theta=\frac{\pi}{12}$$

であり, $t=\sqrt{2}$ のとき

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

であるから, ②より

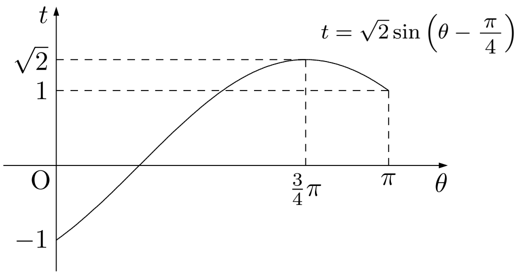
$$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\ すなわち,\ \theta=\frac{3}{4}\pi$$

である. 以上より, $f(\theta)$ は

$$\theta=\frac{\pi}{12}\ で最大値\ \frac{3\sqrt{2}}{4},\quad \theta=\frac{3}{4}\pi\ で最小値\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる.

(3) ①かつ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす θ は右図より



$$\begin{cases} -1 \leqq t < 1 \text{ または } t=\sqrt{2} \text{ のとき 1個} \\ 1 \leqq t < \sqrt{2} \text{ のとき 2個} \end{cases}$$

である．また，$g(t)=a$ を満たす実数 t の値は，$y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の t 座標と一致する．よって，$y=g(t)$ のグラフと $g(1)=-1$, $g(-1)=1$ より，$f(\theta)=a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲は

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} < a \leqq -1 \text{ または } 1 \leqq a < \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

……(答)

である．

$\boxed{3}$ $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は全部で 6^n 通りであり，これらは同様に確からしい。最大公約数が k である事象を A_k，確率を $P(A_k)$ とする。なお，事象 E が起こる $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の個数を $n(E)$ で表す。

(1) A_3 は，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 3 または 6 であり，かつ，少なくとも 1 つが 3 である事象である。$n(A_3)$ は，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 3 または 6 である 2^n 通りから，X_1，$X_2, \cdots, X_n$ がすべて 6である 1 通りを除いて得られるから $n(A_3)=2^n-1$ であり，

$$P(A_3)=\frac{2^n-1}{6^n}$$ …… (答)

である。

(2) A_1 は，A_k $(2\leqq k\leqq 6)$ の和事象の余事象である。

A_6 は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 6 である事象であるから $n(A_6)=1$ である。

A_5 は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 5 である事象であるから $n(A_5)=1$ である。

A_4 は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 4 である事象であるから $n(A_4)=1$ である。

A_2 は，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて偶数であり，かつ，最大公約数が 4 でも 6 でもない事象であるから，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて偶数である 3^n 通りからA_4 または A_6 が起こる 2 通りを除いて，$n(A_2)=3^n-2$ である。

以上より，$n(A_1)=6^n-\left\{\left(3^n-2\right)+\left(2^n-1\right)+3\right\}=6^n-3^n-2^n$ であるから

$$P(A_1)=\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$$ …… (答)

である。

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $y=2x^2$ のとき $y'=4x$ である．C_1 上の点 $\mathrm{P}(t, 2t^2)$ における接線の方程式は，

$$y=4t(x-t)+2t^2$$

$$\therefore\ y=4tx-2t^2 \cdots ①$$

である． ① が C_2 にも接するのは，x の 2 次方程式

$$-x^2+2x-\frac{19}{8}=4tx-2t^2$$

$$\therefore\ x^2+(4t-2)x-2t^2+\frac{19}{8}=0$$

が重解をもつときである．このとき，判別式を D とおくと，$\dfrac{D}{4}=0$ より

$$(2t-1)^2+2t^2-\frac{19}{8}=0$$

$$\therefore\ 48t^2-32t-11=0$$

$$\therefore\ (4t+1)(12t-11)=0$$

$$\therefore\ t=-\frac{1}{4},\ \frac{11}{12}$$

である．ゆえに，求める接線の方程式は, ① より

$t=-\dfrac{1}{4}$ のとき $y=-x-\dfrac{1}{8}\cdots$(答)

$t=\dfrac{11}{12}$ のとき $y=\dfrac{11}{3}x-\dfrac{121}{72}\cdots$(答)

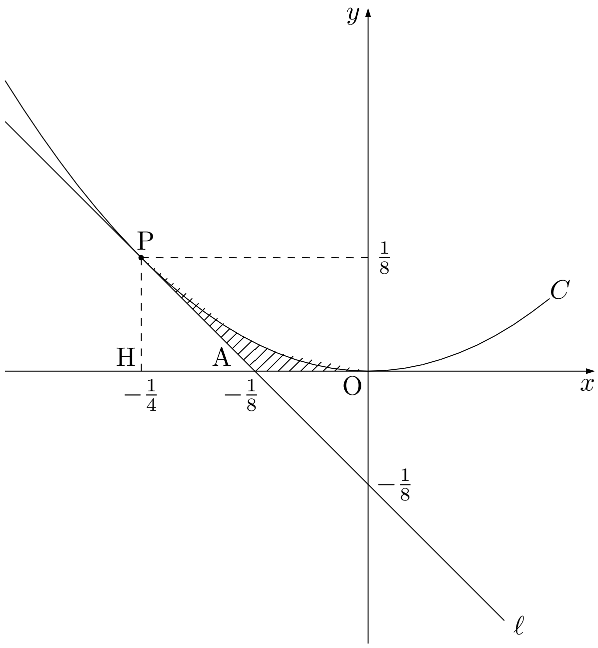
(2) (1) より ℓ の方程式は $y=-x-\dfrac{1}{8}$ である．

ℓ と x 軸との交点を A，接点 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を H とすると

$$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{8}, 0\right),\ \mathrm{H}\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

である．よって，下図より,C_1, x 軸および ℓ が囲む面積 S は, C_1, x 軸および 線分 PH が囲む面積から △APH の面積を引いたもので

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{4}}^{0} 2x^2dx - \frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdot\frac{1}{8} \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{4}}^{0} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} \\
&= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{128} \\
&= \frac{1}{96} - \frac{1}{128} = \frac{1}{384}\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$


y
P
$\frac{1}{8}$
C
H
A
O
x
$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{8}$
ℓ