2020年度 北海道大学 前期 数学 理系

$\boxed{1}$

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{6}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{6}$ であるから，両辺を 2 乗すると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=6$$

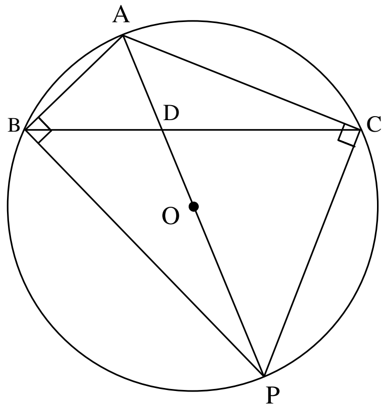
$$\therefore\quad 2^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+1^2=6$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　四角形ABPCとその外接円は，右図のようになる．O が外心であることに注意すると，線分 AP は外接円の直径であるから，



$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \text{かつ}\ \overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である．

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\therefore\quad \left(s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\therefore\quad s\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=0$$

$$\therefore\quad s-\frac{1}{2}t-1=0\qquad\cdots\cdots①$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\therefore\quad \left(s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\therefore\quad s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=0$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{2}s+4t-4=0\qquad\cdots\cdots②$$

である．①，② を連立させて解くと，

$$s=\frac{8}{5},\quad t=\frac{6}{5}\qquad\cdots\cdots(答)$$

となる．

(3)　(2)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{14}{5}\cdot\frac{4\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$$

であるから，辺 BC を 3：4 に内分する点は，直線 AP 上にもある．よって，この点が D であるから，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{7}$$

である. したがって,

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{7^2}\left(16\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+24\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+9\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$$

$$=\frac{1}{7^2}(16-12+36)$$

$$=\frac{40}{7^2}$$

であるから, AD の長さ $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ は,

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{2\sqrt{10}}{7}$$ ……(答)

である.

$\boxed{2}$

(1)　2点 $\left(\dfrac{1}{16},\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$16x+9y=1 \qquad \cdots\cdots①$$

点 $(4,\ -7)$ は ① 上にあるので,

$$16\cdot4+9(-7)=1 \qquad \cdots\cdots②$$

① − ② として,

$$16(x-4)+9(y+7)=0 \qquad \therefore\quad 16(x-4)=-9(y+7)$$

となる. 16, 9 は互いに素であるから, $x-4$ は 9 の倍数であり,

$$\begin{cases} x-4=9n \\ y+7=-16n \end{cases} \quad (n\text{ は整数})$$

と表せる. よって, ℓ 上にある格子点の座標は,

$$\mathrm{P}(9n+4,\ -16n-7) \quad (n\text{ は任意の整数}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) の格子点 P と原点との距離 d は,

$$d=\sqrt{(9n+4)^2+(-16n-7)^2}$$
$$=\sqrt{337n^2+296n+65}$$

である. 放物線 $y=337x^2+296x+65$ の軸は直線 $x=-\dfrac{148}{337}$ であり,

$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{148}{337}<0$ であることに注意すると, d が最小となる整数 n は, $n=0$ であり, d が次に小さい n は, $n=-1$ である. よって, P で

$n=0$ として $\mathrm{A}(4,\ -7)$

$n=-1$ として $\mathrm{B}(-5,\ 9)$

であり, $\mathrm{C}(4,\ 9)$ となる.

ここで, $\mathrm{D}(-5,\ -7)$ をとり, 長方形ACBDの内部および周上にある格子点を考える. 線分 BC 上に格子点は,

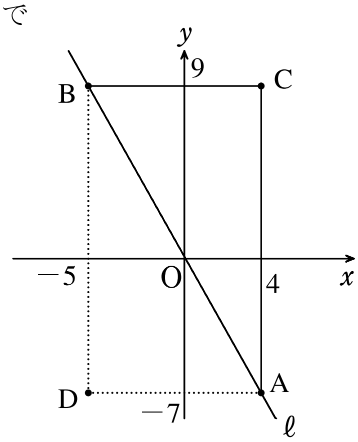
$$4-(-5)+1=10 \text{ 個}$$

ある. また, 線分 AC 上に格子点は,

$$9-(-7)+1=17 \text{ 個}$$

あるから, 全部で

$$10\times17=170 \text{ 個}$$



ある。ℓ 上の格子点が A, B の 2 点であり, 三角形 ABC の内部および周にある格子点と三角形 ABD の内部および周にある格子点が同数であることから, 三角形 ABC の内部および周にある格子点の個数は,

$$\frac{170-2}{2}+2=86\text{ 個} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$ $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は全部で 6^n 通りであり，これらは同様に確からしい。最大公約数が k である事象を A_k，確率を $P(A_k)$ とする。なお，事象 E が起こる $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の個数を $n(E)$ で表す。

(1) A_3 は，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 3 または 6 であり，かつ，少なくとも 1 つが 3 である事象である。$n(A_3)$ は，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 3 または 6 である 2^n 通りから，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 6である 1 通りを除いて得られるから $n(A_3)=2^n-1$ であり，

$$P(A_3)=\frac{2^n-1}{6^n} \quad \cdots\cdots \text{（答）}$$

である。

(2) A_1 は，A_k $(2 \leqq k \leqq 6)$ の和事象の余事象である。

A_6 は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 6 である事象であるから $n(A_6)=1$ である。

A_5 は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 5 である事象であるから $n(A_5)=1$ である。

A_4 は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 4 である事象であるから $n(A_4)=1$ である。

A_2 は，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて偶数であり，かつ，最大公約数が 4 でも 6 でもない事象であるから，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて偶数である 3^n 通りから A_4 または A_6 が起こる 2 通りを除いて，$n(A_2)=3^n-2$ である。

以上より，$n(A_1)=6^n-\{(3^n-2)+(2^n-1)+3\}=6^n-3^n-2^n$ であるから

$$P(A_1)=\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n} \quad \cdots\cdots \text{（答）}$$

である。

(3) $20=2^2 \cdot 5$ であるから，最小公倍数が 20 となるのは，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ には3 も 6 も含まれない（事象 B とする）

かつ，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の少なくとも 1 つが 4 である（事象 C とする）

かつ，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の少なくとも 1 つが 5 である（事象 D とする）

が起こる場合である。ここで，

$$\begin{aligned} n(B\cap C\cap D)&=n(B)-n\{(B\cap\bar{C})\cup(B\cap\bar{D})\} \\ &=n(B)-\{n(B\cap\bar{C})+n(B\cap\bar{D})-n((B\cap\bar{C})\cap(B\cap\bar{D}))\} \\ &=n(B)-\{n(B\cap\bar{C})+n(B\cap\bar{D})-n(B\cap(\bar{C}\cap\bar{D}))\} \end{aligned}$$

B は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 1 または 2 または 4 または 5 である事象であるから $n(B)=4^n$ である。

$B\cap\bar{C}$ は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 1 または 2 または 5 である事象であるから $n(B\cap\bar{C})=3^n$ である。

$B\cap\bar{D}$ は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 1 または 2 または4 である事象であるから $n(B\cap\bar{D})=3^n$ である。

$B\cap(\bar{C}\cap\bar{D})$ は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ がすべて 1 または 2 である事象であるから $n(B\cap(\bar{C}\cap\bar{D}))=2^n$ である。

以上より，最小公倍数が 20 となる $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の個数は

$$4^n-(3^n+3^n-2^n)=4^n-2\cdot 3^n+2^n$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{4^n-2\cdot 3^n+2^n}{6^n} \quad \cdots\cdots \text{（答）}$$

である。

$\boxed{4}$

(1)　まず,

$$0 < a_n < 1 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.

[1] $n=1$ のとき,

$a_1=\alpha$ と $0<\alpha<1$ より, ① は成り立つ.

[2] $n=k$ のときに ① が成り立つと仮定すると,

$$0 < a_k < 1$$

$$\therefore \quad 0 < \frac{\pi a_k}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad 0 < \sin\frac{\pi a_k}{2} < 1$$

である. よって, $0 < a_{k+1} < 1$ が成り立つから, $n=k+1$ でも ① は成り立つ.

[1] [2] より, すべての自然数 n で ① が成り立つ.

次に, $F(x)=f(x)-x=\sin\frac{\pi x}{2}-x$ $(0<x<1)$ とおくと,

$$F'(x)=f'(x)-1$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{\pi}\right)$$

である. $\cos\frac{\pi\alpha}{2}=\frac{2}{\pi}$ $(0<\alpha<1)$ とおくと,

$0<x<\alpha$ のとき, $F'(x)>0$

$\alpha<x<1$ のとき, $F'(x)<0$

であることから, 増減表は右のようになる.

x	(0)		α		(1)
$F'(x)$		$+$		$-$	
$F(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

よって, $0<x<1$ で $F(x)=f(x)-x>0$ が成り立つから, $f(a_n)>a_n$ つまり

$$a_{n+1}>a_n$$

が成り立つ　(証明おわり)

(2)　$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$, $f''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}$ に注意する.

$g(x)=\frac{1-f(x)}{1-x}$ $(0<x<1)$ とおくと,

$$g'(x)=\frac{-f'(x)(1-x)-(-1)(1-f(x))}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{-f'(x)+xf'(x)+1-f(x)}{(1-x)^2}$$

である. この分子を $h(x)$ とおくと,

$$h'(x)=-f''(x)+f'(x)+xf''(x)-f'(x)$$
$$=(x-1)f''(x)$$

$0<x<1$ において, $x-1<0$ かつ $f''(x)<0$ であるから,

$$h'(x)>0$$

とわかり, $h(1)=0$ と合わせると, $0<x<1$ において $h(x)<0$ つまり $g'(x)<0$ が成り立つ. これより, $g(x)$ は減少関数であるから, $a_{n+1}>a_n$ より,

$$g(a_{n+1})<g(a_n)$$

$$\therefore\quad \frac{1-f(a_{n+1})}{1-a_{n+1}}<\frac{1-f(a_n)}{1-a_n}$$

$$\therefore\quad \frac{1-a_{n+2}}{1-a_{n+1}}<\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$$

$$\therefore\quad b_{n+1}<b_n$$

が成り立つ (証明おわり)

(3) (1) より,

$$0<a_n<a_{n+1}<1$$

$$\therefore\quad 0>-a_n>-a_{n+1}>-1$$

$$\therefore\quad 1>1-a_n>1-a_{n+1}>0$$

これより, $0<\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}<1$ なので, $0<b_n<1$ が成り立つ. よって,

$b_1=r$ とおくと, $0<r<1$ であり, (2) より, $n\geqq 2$ のとき

$$b_n<\cdots\cdots<b_1=r$$

となるから, $n\geqq 1$ のとき,

$$b_n\leqq r$$

$$\therefore\quad \frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}\leqq r$$

$1-a_n>0$ であることに注意すると,

$$0<1-a_{n+1}\leqq r(1-a_n)$$

が成り立ち, これを繰り返し用いると,

$$0<1-a_n\leqq(1-a_1)\,r^{n-1}$$

となる. $0<r<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_1)\,r^{n-1}=0$ であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$$

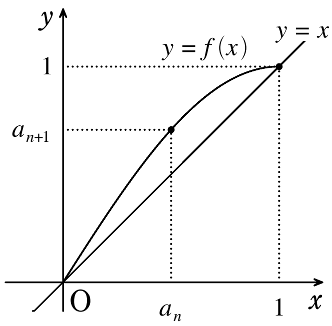
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1$$ ……(答)

である. また, これより,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{a_n\to 1} \frac{f(1)-f(a_n)}{1-a_n}$$
$$= f'(1)$$
$$= 0$$ ……(答)

である.

参考



(1) $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ $(0 < x < 1)$ より,

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}$$

であり, $0<x<1$ より $0<\frac{\pi x}{2}<\frac{\pi}{2}$ なので, $f''(x)<0$ が成り立つので, $y=f(x)$ $(0<x<1)$ は上に凸である.

$a_{n+1}=f(a_n)$ より, 点 $(a_n,\ a_{n+1})$ が $y=f(x)$ 上にあることに注意すると,

$$a_{n+1}=f(a_n)>a_n$$

が成り立つ.

(2) $f(1)=1$ に注意すると,

$$b_n=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\frac{f(1)-f(a_n)}{1-a_n}$$

であるから, b_n は 2 点 $(1,\ 1)$, $(a_n,\ f(a_n))$ を結ぶ直線の傾きを表す. $f(x)$ は上に凸であり, $a_n<a_{n+1}$ であることから,

$$\frac{f(1)-f(a_{n+1})}{1-a_{n+1}}<\frac{f(1)-f(a_n)}{1-a_n}$$

が成り立つので, $b_{n+1}<b_n$ が成り立つ

$\boxed{5}$

(1)
$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = \int_0^x \left\{\frac{1}{f(t)} + \frac{1}{1-f(t)}\right\} f'(t)\,dt$$
$$= \Big[\log|f(t)| - \log|1-f(t)|\Big]_0^x = \left[\log\left|\frac{f(t)}{1-f(t)}\right|\right]_0^x$$

である．すべての実数 x に対して $0 < f(x) < 1$ であり，$f(0) = \dfrac{1}{3}$ であるから

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = \log\frac{f(x)}{1-f(x)} - \log\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \log\frac{2f(x)}{1-f(x)}$$

である．よって

$$\log\frac{2f(x)}{1-f(x)} = ax$$
$$\therefore\ \frac{2f(x)}{1-f(x)} = e^{ax}$$

であるから，これを $f(x)$ について解くと

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}$$ ……(答)

である．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) > 0$ であるから

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}\,dx \\ &= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{(e^{ax}+2)'}{e^{ax}+2}\,dx \\ &= \frac{1}{a}\Big[\log(e^{ax}+2)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{a}\log\frac{e^a+2}{3} \end{aligned}$$ ……(答)

である．また

$$S(a) = \frac{1}{a}\log\left(1+\frac{e^a-1}{3}\right)$$

である．$t = \dfrac{e^a-1}{3}$ とすると，$a = \log(1+3t)$ であり，$a \to +0$ のとき，$t \to +0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{a\to+0} S(a) &= \lim_{t\to+0} \frac{\log(1+t)}{\log(1+3t)} \\ &= \lim_{t\to+0} \frac{\frac{\log(1+t)}{t}\cdot t}{\frac{\log(1+3t)}{3t}\cdot 3t} \\ &= \lim_{t\to+0} \frac{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}{3\log(1+3t)^{\frac{1}{3t}}} \\ &= \frac{\log e}{3\log e} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

$\boxed{\text{別解}}$

$$S(a)=\frac{\log\left(e^a+2\right)-\log 3}{a-0}$$

である．$g(x)=\log\left(e^x+2\right)$ とすると，$g'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$ であるから

$$\lim_{a\to 0}S(a)=\lim_{a\to +0}\frac{g(a)-g(0)}{a-0}=g'(0)=\frac{1}{3}$$

である．