I

《答》

| $\frac{(1)}{(2)}$ | $\frac{\sqrt{(3)}}{(4)}$ | $\frac{(5)(6)}{(7)}$ | $\frac{(8)}{(9)}$ | $\frac{(10)}{(11)}$ | $\frac{(12)}{(13)}$ | $\frac{(14)}{(15)}$ | $\frac{(16)}{(17)}$ | (18)(19)(20)(21) | (22) | (23) | (24)(25) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-5}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{7}{9}$ | 1024 | 3 | 2 | 12 |

《解説》

(i)　$a_{n+1}=za_n-z^2$ ……① の一般項が $a_n=1\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ であるとき，$n=1$ で①が成り立つことが必要であるから

$$1=z-z^2$$

すなわち

$$z^2-z+1=0$$

よって

$$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\ \cdots\cdots②$$

$f(x)=zx-z^2$ とおくと，①は $a_{n+1}=f(a_n)$ となる．$f(1)=z-z^2=1$ であるから $a_1=1$ であれば，帰納的に，①を満たす $a_n$ は $a_n=1$ である．

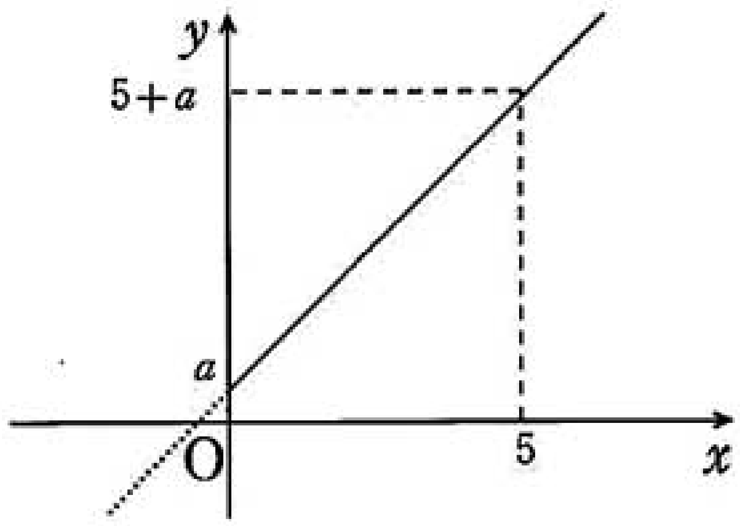
よって，②は適する．

(ii)　$I=\int_{-5}^{5}|f(x)|dx$ とおくと，$f(-x)=f(x)$ であるから

$$I=2\int_0^5|f(x)|dx=2\int_0^5|x+a|dx$$

である．

(ア) $a\geqq 0$ のとき，$y=x+a\,(x\geqq 0)$ のグラフは右図のようになる．

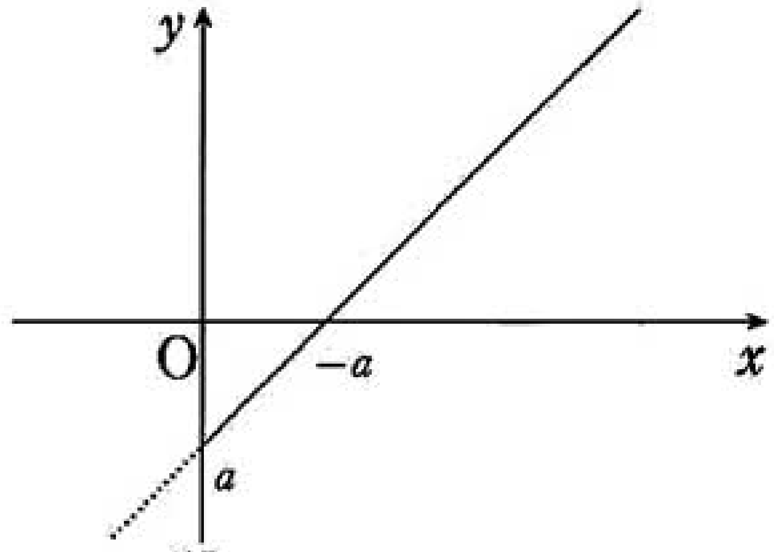



よって

$$I=2\int_0^5(x+a)dx=2\left(\frac{25}{2}+5a\right)\geqq 25$$

（イ） $a<0$ のとき， $y=x+a(x\geqq 0)$ の

グラフは右図のようになる.




よって

$a\leqq -5$ のとき

$$I=-2\int_0^5(x+a)dx=-2\left(\frac{25}{2}+5a\right)$$
$$=-25-10a\geqq 25$$

$-5<a<0$ のとき

$$I=2\left\{-\int_0^{-a}(x+a)dx+\int_{-a}^5(x+a)dx\right\}=a^2+5a+\frac{25}{2}$$
$$=\left(a+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

（ア），（イ）より， $I$は， $a=-\frac{5}{2}$ のとき最小となる.

(iii) $f'(x)=12x^2-3$ であるから， $f'(\sin\theta)=3-3\sqrt{2}$ のとき

$$12\sin^2\theta-3=12\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}-3=3-3\sqrt{2}$$

であるから

$$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である． $0<\theta<\pi$ より $0<2\theta<2\pi$ であるから

$$2\theta=\frac{1}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$$

したがって

$$\theta=\frac{1}{8}\pi,\frac{7}{8}\pi$$

である.

$f(\cos\theta)=\frac{1}{2}$ のとき

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta=\frac{1}{2}$$

である． $0<\theta<\pi$ より $0<3\theta<3\pi$ であるから

$$3\theta=\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi,\frac{7}{3}\pi$$

したがって

$$\theta=\frac{1}{9}\pi,\frac{5}{9}\pi,\frac{7}{9}\pi$$

である.

(iv) $\tan^{2r}\frac{\pi}{3}=(\sqrt{3})^{2r}=3^r$ であるから

$$\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r\tan^{2r}\frac{\pi}{3}=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r3^r=(1+3)^5=2^{10}=1024$$

である.

(v) $a_1=4$ と $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n{}^3$ より，帰納的に，すべての自然数 $n$ に対して $a_n>0$ である.

よって，$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}{a_n}^3$ の両辺の対数（底は2）をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2^{-2}+\log_2 {a_n}^3=3\log_2 a_n-2$$

であり，$\log_2 a_n=b_n$ とおくと

$$b_{n+1}=3b_n-2$$

となり，

$$b_{n+1}-1=3(b_n-1)$$

と変形できる．$\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=\log_2 a_1-1=1$ ，公比3の等比数列であるから

$$b_n-1=3^{n-1}$$

すなわち

$$b_n=3^{n-1}+1$$

である．$a_n>2\cdot 10^{30100}$ が成り立つとき，$\log_2 a_n=b_n>1+30100\log_2 10$ より

$$3^{n-1}>30100\log_2 10=\frac{30100}{\log_{10}2}=100000$$

両辺の常用対数をとって

$$(n-1)\log_{10}3>\log_{10}10^5=5$$

したがって

$$n>\frac{5}{\log_{10}3}+1=11.48\cdots\cdots$$

よって．最小の自然数 $n$ は12である．

**II**

| (26) | (27) | (28) | (29) | (30) | (31)(32) |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 8 | 1 | 8 | 1 | 16 |

| (33) | (34) | (35)(36) | (37)(38) | (39)(40) | (41)(42) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 23 | 64 | 29 | 64 |

(i) 初期状態では, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ である。

　このとき, 試行 T を行うと以下のようになる。

(ア) $Q_2$, $Q_8$ がともに表, または, ともに裏となるとき, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ のままである。

(イ) $Q_2$ が表, $Q_8$ が裏となるとき, $\angle AOB=\pi$ となる。

(ウ) $Q_2$ が裏, $Q_8$ が表となるとき, $\angle AOB=0$ となる。

このそれぞれの確率は,

$$(ア)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2}\quad (イ)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\quad (ウ)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

となる。また, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ のときは, 初期状態ではなくても, 試行 T を行うと (ア)〜(ウ) と同様に $\angle AOB$ が変化する。

　$\angle AOB=\pi$ のとき, 試行 T を行うと以下のようになる。

(エ) A, B が円周上を同じ向きに回転するように動くとき, $\angle AOB=\pi$ のままである。

(オ) A, B が円周上を異なる向きに回転するように動くとき, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

このそれぞれの確率は,

$$(エ)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2}\quad (オ)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2}$$

　さらに $\angle AOB=0$ のときは, 試行 T を行っても $\angle AOB=0$ のままとなる。

　初期状態から試行 T を 2 回行って, A と B の座標が一致, すなわち, $\angle AOB=0$ となるのは,

$$\angle AOB=\frac{\pi}{2}\to\angle AOB=0\to\angle AOB=0$$

または

$$\angle AOB=\frac{\pi}{2}\to\angle AOB=\frac{\pi}{2}\to\angle AOB=0$$

と推移するときより, その確率は,

$$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\qquad\cdots\cdots(答)$$

となる。

　初期状態から試行 T を 2 回行って, A と C の座標が一致するとき,

$$\angle AOC=\pi\to\ \angle AOC=\frac{\pi}{2}\to\ \angle AOC=0$$

と推移するときである。この角度の変化は $\angle AOB$ のときと同様に考えることができるので, このようになる確率は,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\qquad\cdots\cdots(答)$$

となる。

　初期状態から試行 T を 2 回行って, A, B, C の座標が一致するとき, 少なくとも A と C の座標が一致する必要がある。このとき, A と C の座標はともに (0, 1) または (0, −1) となるが, 2 回の試行 T で初期状態が (0, 1)

であるBが$(0,\ -1)$まで動くことはできないので，A, B, Cの座標が一致するのは$(0,\ 1)$においてである。

逆に，2回の試行TでAとCがともに$(0,\ 1)$になるとき，Bは1回の試行TでAまたはCと座標が一致し，2回目の試行ではBも$(0,\ 1)$に戻る。

したがって，2回の試行TでA, B, Cの座標が一致するのは，

1回目で$Q_8$が表，$Q_4$が裏，2回目で$Q_1$が表，$Q_3$が裏

となるときより，確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる。

(ii) 試行Tを2回行ったとき，事象$E$, $F$を

$E$:「AとBの座標が一致する」

$F$:「A, B, Cの座標が一致する」

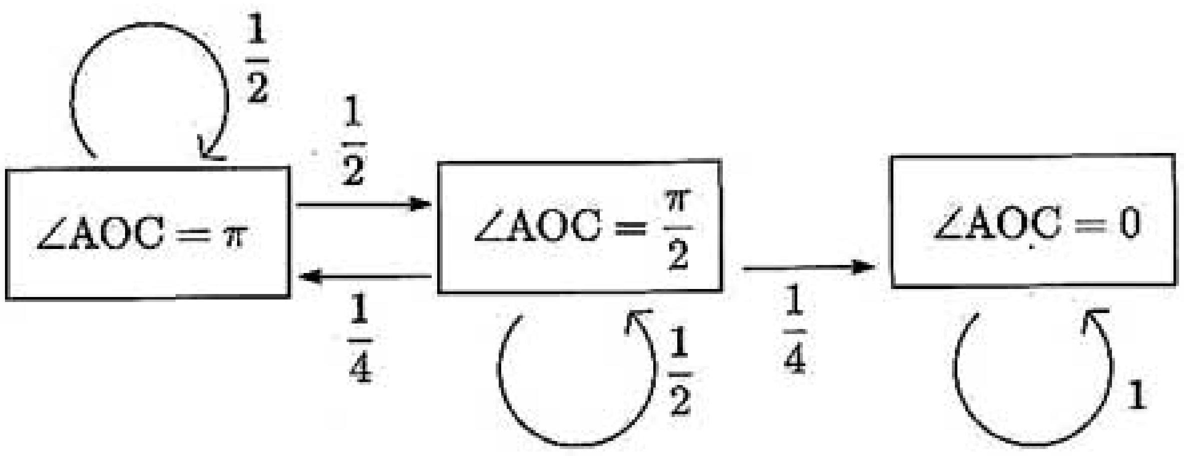
とすると，(i)より，

$$P(E)=\frac{3}{8},\quad P(E\cap F)=\frac{1}{16}$$

であり，求める確率は$E$の条件の下で$F$となる確率であるから，

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{6} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(iii) (iv) 試行Tを1回行ったときの∠AOCの推移とその確率は(i)と同様に考えると，以下の図のようになる。




これより，初期状態から試行Tを$n$回行ったとき，$\angle\mathrm{AOC}=\pi,\ \frac{\pi}{2},\ 0$である確率をそれぞれ，$p_n$, $q_n$, $r_n$とすると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}q_n,\quad q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n,\quad r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+r_n$$

となる。

初期状態では，$\angle\mathrm{AOC}=\pi$であるから，$p_0=1$, $q_0=r_0=0$と考えることができ，これと上記の漸化式より，$n$の値に対する$p_n$, $q_n$, $r_n$の値は以下のようになる。

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_n$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{17}{64}$ | $\frac{29}{128}$ |
| $q_n$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{41}{128}$ |
| $r_n$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{23}{64}$ | $\frac{29}{64}$ |

よって, 試行 T を 4 回行ったとき, A と C の座標が一致している確率は,

$$r_4 = \frac{23}{64} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり, また, 試行 T を 5 回行ったとき, A と C の座標が一致している確率は,

$$r_5 = \frac{29}{64} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である。

**III**

| (43) | $-\dfrac{x^2+\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}(x^2+\boxed{(46)})}$ | $\dfrac{\lvert x^2-\boxed{(47)}\rvert}{\boxed{(48)}\sqrt{x^2+\boxed{(49)}}}$ | $\dfrac{\boxed{(50)}\sqrt{\boxed{(51)}}}{\boxed{(52)}}$ | $\dfrac{\boxed{(53)}\sqrt{\boxed{(54)}}}{\boxed{(55)}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-\dfrac{x^2+6}{2(x^2+1)}$ | $\dfrac{\lvert x^2-4\rvert}{2\sqrt{x^2+1}}$ | $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ |

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x,\ f(x))$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2x,\ f(x)+xf'(x))$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2x-x,\ f(x)+xf'(x)-f(x))=(x,\ xf'(x))$$

となるので, 点Pが直線AB上の点のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x,\ f(x))+(tx,\ txf'(x))=(x(t+1),\ f(x)+txf'(x)) \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表せる。

(ii) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ より, $f'(x)=x$ であるから, (i) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(x(t+1),\ \frac{1}{2}x^2+2+tx^2\right)=\left(xt+x,\ x^2t+\frac{1}{2}x^2+2\right)$$

なので,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=(xt+x)^2+\left(x^2t+\frac{1}{2}x^2+2\right)^2\\&=x^2(x^2+1)t^2+x^2(x^2+6)t+\frac{1}{4}x^4+3x^2+4\\&=x^2(x^2+1)\left(t+\frac{x^2+6}{2(x^2+1)}\right)^2+\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2+1)}\end{aligned}$$

となる。

よって, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の大きさは,

$$t=-\frac{x^2+6}{2(x^2+1)} \text{ のとき, 最小値 } \sqrt{\frac{(x^2-4)^2}{4(x^2+1)}}=\frac{|x^2-4|}{2\sqrt{x^2+1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる。

(iii) $\mathrm{A}\left(x,\ \frac{1}{2}x^2+2\right)$, $\mathrm{B}\left(2x,\ \frac{3}{2}x^2+2\right)$ となるので, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 $S$ は,

$$S=\frac{1}{2}\left|x\left(\frac{3}{2}x^2+2\right)-2x\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)\right|=\frac{1}{4}|x^3-4x|$$

ここで, $g(x)=x^3-4x$ とおくと, $g'(x)=3x^2-4$ より, $0<x<2$ で $g(x)$ は下表のように増減する。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | 0 | $\searrow$ | $-\frac{16}{3\sqrt{3}}$ | $\nearrow$ | 0 |

よって, $0<x<2$ では $g(x)<0$ より $S=-\frac{1}{4}g(x)$ となり, $S$ は,

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ で, 最大値 } \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる。

IV.

| (ア) | (イ) | (ウ) | (エ) | (オ) | (カ) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{\sqrt{2t+t^2}}{1+t}$ | $\dfrac{1}{1+t}$ | $\sqrt{2t+t^2}$ | $1+t$ | $\dfrac{1}{(1+t)^2}$ | 28 |

(i) $zx$ 平面上の点 A は球面 $S$ 上の点でもあるから

$$\mathrm{A}(r\cos\varphi,\ 0,\ r\sin\varphi) \quad (0^\circ < \varphi < 90^\circ)$$

とおくことができて，点 A における $S$ の接平面 $\alpha$ の方程式は

$$\cos\varphi(x - r\cos\varphi) + \sin\varphi(z - r\sin\varphi) = 0$$

$$\therefore\ x\cos\varphi + z\sin\varphi - r = 0$$

と表される。$\alpha$ は点 $\mathrm{H}(0,\ 0,\ r+h)$ を通るから

$$0 + (r+h)\sin\varphi - r = 0$$

$$\therefore\ \sin\varphi = \frac{r}{r+h} = \frac{1}{1+\frac{h}{r}}$$

$t = \dfrac{h}{r}$ とすると

$$\sin\varphi = \frac{1}{1+t}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{(1+t)^2-1}}{1+t} = \frac{\sqrt{2t+t^2}}{1+t}$$

点 A の座標は

$$\left(\underset{(ア)}{\boxed{\frac{\sqrt{2t+t^2}}{1+t}}}r,\ 0,\ \underset{(イ)}{\boxed{\frac{1}{1+t}}}r\right)$$

(ii) (i)の考察より，平面 $\alpha$ の方程式は

$$\frac{\sqrt{2t+t^2}}{1+t}x + \frac{1}{1+t}z = r$$

$$\therefore\ \underset{(ウ)}{\boxed{\sqrt{2t+t^2}}}x + z = \left(\underset{(エ)}{\boxed{1+t}}\right)r$$

(iii) 平面 $\alpha$ の法線ベクトルを $\overrightarrow{a}$ とすると，(i)の考察より

$$\overrightarrow{a} = (\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi)$$

としてよい。同様に，平面 $\beta$ の法線ベクトル $\overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{b} = (0,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi)$$

としてよいから，

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{\sin^2\varphi}{1\times1} = \boxed{\frac{1}{(1+t)^2}}\ (オ)$$

(別法) (ii)をもとにして，$\alpha$，$\beta$の法線ベクトルをそれぞれ

$$(\sqrt{2t+t^2},\ 0,\ 1),\ (0,\ \sqrt{2t+t^2},\ 1)$$

としてもよい。

(iv) $r=6400$，$h=400$ のとき

$$t=\frac{h}{r}=\frac{1}{16}$$

(iii)より

$$\cos\theta=\frac{1}{\left(\frac{1}{16}+1\right)^2}=\frac{16^2}{17^2}=\frac{256}{289}=0.885\cdots$$

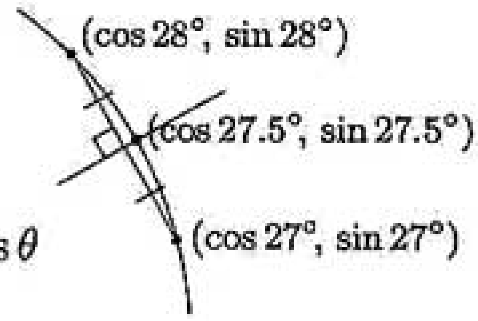
三角比の表より

$$\cos 27^\circ=0.8910,\quad \cos 28^\circ=0.8829$$

であるから

$$27^\circ<\theta<28^\circ$$

座標平面上において $(\cos 27^\circ,\ \sin 27^\circ)$，$(\cos 28^\circ,\ \sin 28^\circ)$ の中点と $(\cos 27.5^\circ,\ \sin 27.5^\circ)$ の位置関係を考えると




$$\cos 27.5^\circ>\frac{\cos 27^\circ+\cos 28^\circ}{2}=0.88695>\cos\theta$$

であるから

$$27.5^\circ<\theta<28^\circ$$

小数第1位を四捨五入すると

$$\theta\fallingdotseq\underset{(カ)}{\boxed{28}}^\circ$$

(別法) $2\theta$を評価してもよい。

$\cos\theta=\frac{256}{289}$ まで求めたあと，2倍角の公式より

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{256}{289}\right)^2-1=\frac{47551}{83521}=0.56\cdots$$

三角比の表より

$$\cos 55^\circ=0.5736,\quad \cos 56^\circ=0.5592$$

であるから

$$55^\circ<2\theta<56^\circ\qquad\therefore\ 27.5^\circ<\theta<28^\circ$$

小数第1位を四捨五入すると

$$\theta\fallingdotseq\underset{(カ)}{\boxed{28}}^\circ$$