2020年度 神戸大学 前期 数学 理系

1.

(1) $f(x)$ を2次式 $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商を整式 $Q(x)$，余りを1次以下の整式 $ax+b$ とおくと

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b$$

と表せる．

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$$

条件 (ii) より

$$\begin{cases} f(\alpha)=a\alpha+b=0 \\ f'(\alpha)=a=0 \end{cases} \qquad \therefore a=b=0$$

よって，余りが0となるので，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．(証明終わり)

(2) $f(x)$ は3次式であることと (1) の結果，条件 (i)，および $f(\alpha+2)=0$ より

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-2)$$

とおける．

$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x-\alpha)(x-\alpha-2)+(x-\alpha)^2 \\ &=(x-\alpha)(3x-3\alpha-4) \end{aligned}$$

$\dfrac{3\alpha+4}{3}=\alpha+\dfrac{4}{3}\neq\alpha$ より
$f'(x)=0$ かつ $x\neq\alpha$ をみたす x は

$$\alpha+\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

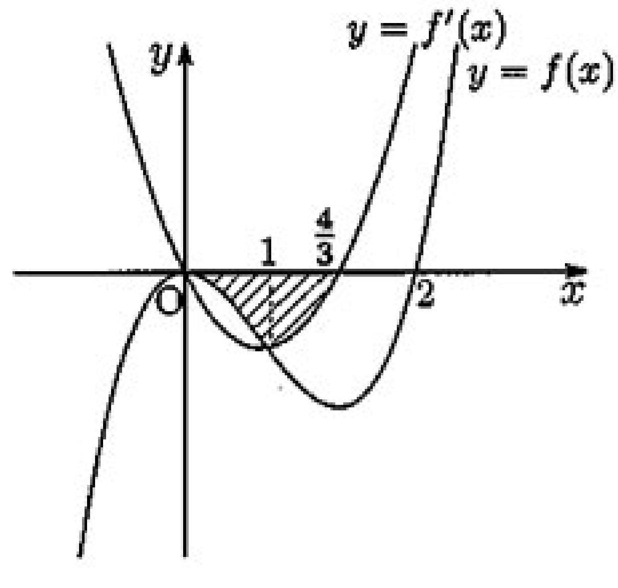
(3) $\alpha=0$ のとき，

$$f(x)=x^3-2x^2=x^2(x-2)$$
$$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$$

であり

$$f(x)-f'(x)=x(x-1)(x-4)$$

であるから，不等式 $y\geqq f(x)$ かつ $y\geqq f'(x)$ かつ $y\leqq 0$ の表す部分は，右図の斜線部分である．

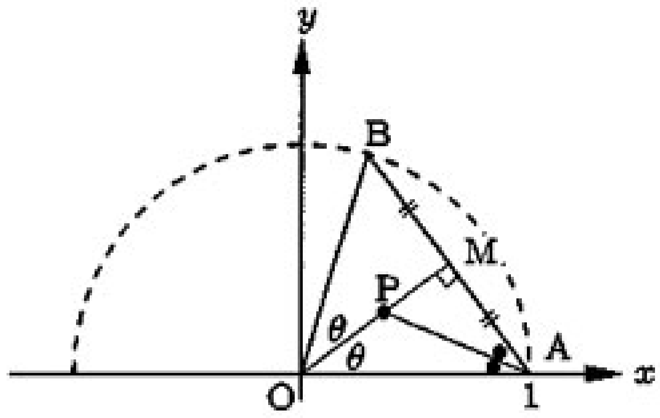


したがって，求める面積は

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^1 f(x)dx-\int_1^{\frac{4}{3}} f'(x)dx\\
&=-\int_0^1 (x^3-2x^2)dx-\int_1^{\frac{4}{3}}(3x^2-4x)dx\\
&=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1-\left[x^3-2x^2\right]_1^{\frac{4}{3}}\\
&=-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{64}{27}-\frac{32}{9}\right)+(1-2)\\
&=\frac{65}{108} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}
\end{aligned}
$$

2．）

(1) $\triangle$OAB の辺 AB の中点を M とすると，



$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2},\ \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{1+(1-2\sin^2\theta)}{2},\ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right)$$
$$= (1-\sin^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)$$

また，$\triangle$OAB は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ の二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{OMA} = \frac{\pi}{2}$

さらに，$\angle\mathrm{AOM} = \theta$ であるから

$$\mathrm{AM} = \mathrm{OA}\cdot\sin\theta = \sin\theta$$

いま，直線 OM は $\angle$AOB の二等分線であるから，$\triangle$OAB の内接円の中心 P は，直線 OM と $\angle$OAB の二等分線の交点である．

したがって，三角形の内角の二等分線の性質から，

$$\mathrm{OP}:\mathrm{PM} = \mathrm{AO}:\mathrm{AM} = 1:\sin\theta$$

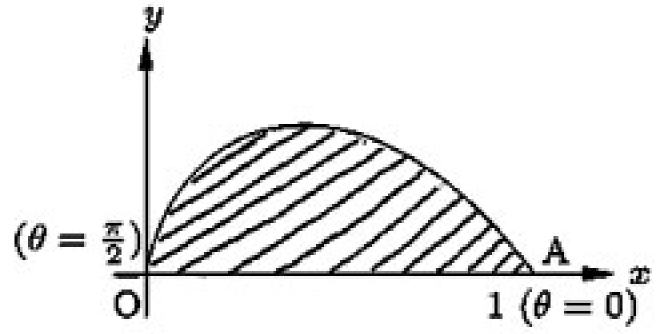
ゆえに，

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\sin\theta}\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta},\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$
$$= \left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

すなわち，点 P の座標は $\left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表せる．　(証明終わり)

(2) P$(x,\ y)$ とすると，(1) より

$$\begin{cases} x = 1-\sin\theta & \cdots ① \\ y = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta} & \cdots ② \end{cases}$$



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，①より

$$\frac{dx}{d\theta} = -\cos\theta < 0$$

であるから，点 P の x 座標は単調に減少する．

また，②より，$y > 0$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから，点 P が描く曲線は x 軸の上方にある．

さらに，$\theta = 0$ のとき P$(1,\ 0)$，$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき P$(0,\ 0)$ と考えれば，領域 D は図の斜線部分のようになる．

よって，求める体積を V とすると，

$$V = \pi\int_0^1 y^2\,dx$$

ここで，①より

$$dx = -\cos\theta\,d\theta$$

x	$0 \to 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

これと②より，

$$V = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\cdot(-\cos\theta)\,d\theta = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta$$

さらに，$1+\sin\theta = t$ とおくと，

$$\cos\theta\, d\theta = dt$$

θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$1 \to 2$

ゆえに，

$$V = \pi \int_1^2 \frac{(t-1)^2(-t+2)}{t}\, dt = \pi \int_1^2 \left(-t^2 + 4t - 5 + \frac{2}{t}\right) dt$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t + 2\log t \right]_1^2$$

$$= \pi \left(2\log 2 - \frac{4}{3} \right) \ \cdots \text{(答)}$$

＜注 1＞

②より，$y = \dfrac{\sin 2\theta}{2(1+\sin\theta)}$ であるから，

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\cos 2\theta(1+\sin\theta) - \sin 2\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(1-2\sin^2\theta)(1+\sin\theta) - 2\sin\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)(-\sin^2\theta - \sin\theta + 1)}{(1+\sin\theta)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2\theta + \sin\theta - 1}{1+\sin\theta}$$

$$= -\frac{1}{1+\sin\theta}\left(\sin\theta - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sin\theta - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

よって，$\sin\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす α をとると，点 P の y 座標の増減は次のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y		↗	極大	↘	

＜注 2＞

①より，

$$\sin\theta = 1 - x$$
$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2}$$

これらを②に代入すると，

$$y = \frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2-x} \ \cdots \text{③}$$

よって，点 P が描く曲線は，曲線③の $0 < x < 1$ の部分である．

したがって，求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 \left\{ \frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2-x} \right\}^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{(1-x)^2 \cdot x(2-x)}{(2-x)^2}\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2 - x}\, dx = -\pi \int_0^1 \left(x^2 + 1 + \frac{2}{x - 2} \right) dx$$

$$= -\pi \left[\frac{1}{3}x^3 + x + 2\log|x - 2| \right]_0^1$$

$$= \pi \left(2\log 2 - \frac{4}{3} \right)$$

３．

（１）　求めるものは

$$x+y=30$$

を満たす自然数の組 (x, y) の個数であり，それは

$$(x, y)=(1, 29), (2, 28), (3, 27), (4, 26), \cdots\cdots, (28, 2), (29, 1)$$

の 29(個) …(答)

（２）　求めるものは

$$x+y+z=30 \quad \cdots①$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) の個数である．

$x=k(k=1, 2, 3, \cdots, 28)$ のとき，① は

$$k+y+z=30 \qquad \therefore\ y+z=30-k$$

となり，これを満たす自然数の組 (y, z) は

$$(y, z)=(1, 29-k), (2, 28-k), (3, 27-k), \cdots\cdots, (28-k, 2), (29-k, 1)$$

の $29-k$ 組ある．よって，① を満たす自然数の組 (x, y, z) の個数は

$$\sum_{k=1}^{28}(29-k)=28+27+26+\cdots\cdots+3+2+1$$
$$=\frac{28(28+1)}{2}=406(\text{個}) \cdots(\text{答})$$

（３）　求めるものは，（２）の 406 個のうち，x, y, z を入れ換えると重複するものを除いたものの個数である．（２）の 406 個は

$$\begin{cases}(\text{i})\ 3\text{つとも同じ数のもの}\\ (\text{ii})\ 3\text{つのうち}2\text{つだけ同じ数で残り}1\text{つは異なる数のもの}\\ (\text{iii})\ 3\text{つとも異なる数のもの}\end{cases}$$

の 3 種類に分類できる．

(ｉ)について　$(x, y, z)=(10, 10, 10)$ の 1 個.

(ii)について　2 つだけ同じ数となる数を a，残り 1 つの数を b とすると

$$a+a+b=30 \qquad \therefore\ b=30-2a=2(15-a)$$

であり，これを満たす自然数の組 (a, b) は

$$(a, b)=(1, 28), (2, 26), (3, 24), \cdots\cdots, (14, 2)$$

の 14 個あるが,

$(a, b)=(10, 10)$ は（ｉ）の場合に含まれるので，$14-1=13$ 個.

ただし，順列 (x, y, z) としては，x, y, z のうちどれが b になるかを考えると，${}_3C_1=3$ 通りずつ重複していたので,

$$13\times 3=39 \text{ 個.}$$

(iii)について　（２）における残り $406-1-39=366$ 通りにおいて,

x, y, z の順番をなくすと，$3!=6$ 通りずつ重複するので，組合せとしては

$$\frac{366}{6}=61 \text{ 個.}$$

以上（ｉ），(ii)，(iii) より，求める組合せの総数は

$$1+13+61=75(\text{個}) \cdots(\text{答})$$

4．

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ （$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ ただし，n は自然数）

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$g(x)=x\cos x-\sin x$ とおくと $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$g'(x)=1\cdot\cos x+x(-\sin x)-\cos x=-x\sin x$$

$2n\pi<x<(2n+1)\pi$ のとき $\sin x>0$ より $g'(x)<0$

よって，$g(x)$ は $2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ で単調に減少し

$$g(2n\pi)=2n\pi>0,\ g((2n+1)\pi)=-(2n+1)\pi<0$$

であるから，$g(x)=0$ は $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ の範囲にただ1つの解をもつ．

その解を α_n とすると

$2n\pi<x<\alpha_n$ のとき $g(x)>0$，$\alpha_n<x<(2n+1)\pi$ のとき $g(x)<0$

$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において，$x^2>0$ であるから $f'(x)$ の符号と $g(x)$ の符号は一致する．

したがって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$2n\pi$	…	α_n	…	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

以上より，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において $f(x)$ が最大となる x の値がただ1つ存在することが示された．

（証明終わり）

(2) (1)より $x_n=\alpha_n$

$g\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-1<0$ であるから

$$2n\pi<x_n<2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots①$$

$g(x_n)=0$ より

$$x_n\cos x_n-\sin x_n=0$$

①より $\cos x_n\neq 0$ であるから

$$x_n=\frac{\sin x_n}{\cos x_n} \qquad \therefore\ x_n=\tan x_n$$

よって，$\dfrac{n}{\tan x_n}=\dfrac{n}{x_n}$ であり，①より

$$\frac{n}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\frac{n}{x_n}<\frac{n}{2n\pi} \qquad \therefore\ \frac{1}{2\pi+\frac{\pi}{2n}}<\frac{n}{x_n}<\frac{1}{2\pi}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi+\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{2\pi}$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=\frac{1}{2\pi} \quad \cdots\cdots(答)$$

5.

(1)

$p=3$ より, $x_1=\dfrac{1}{2^3+1}=\dfrac{1}{9}$

$$x_2=|2x_1-1|=\left|2\cdot\frac{1}{9}-1\right|=\frac{7}{9}$$

$$x_3=|2x_2-1|=\left|2\cdot\frac{7}{9}-1\right|=\frac{5}{9}$$

$$x_4=|2x_3-1|=\left|2\cdot\frac{5}{9}-1\right|=\frac{1}{9}$$

よって, $x_4=x_1$ となるので, 数列 $\{x_n\}$ は周期 3 の周期数列であるから,
l を自然数として,

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (n=3l-2 \text{ のとき}) \\ \dfrac{7}{9} & (n=3l-1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{5}{9} & (n=3l \text{ のとき})\end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)

2 以上 $p+1$ 以下の自然数 m について,

$$x_m = \frac{2^p-(2^{m-1}-1)}{2^p+1} \quad \cdots ①$$

であることを数学的帰納法によって証明する.

[1] $m=2$ のとき,

$$x_2 = |2x_1-1| = \left|2\cdot\frac{1}{2^p+1}-1\right| = \left|\frac{1-2^p}{2^p+1}\right|$$

$p \geqq 2$ より, $2^p \geqq 4$ であるから, $1-2^p>0$

$$\therefore\ x_2 = \frac{2^p-1}{2^p+1}$$

であり, ① は成り立つ.

[2] $m=k$ のとき, (k は $2 \leqq k \leqq p$ の自然数)

① が成り立つ, すなわち $x_k = \dfrac{2^p-(2^{k-1}-1)}{2^p+1} \quad \cdots ②$ と仮定する.

このとき,

$$x_{k+1} = |2x_k-1|$$

② より,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left|2\cdot\frac{2^p-(2^{k-1}-1)}{2^p+1}-1\right| \\ &= \left|\frac{2\cdot 2^p-2(2^{k-1}-1)-(2^p+1)}{2^p+1}\right| \\ &= \left|\frac{2^p-(2^k-1)}{2^p+1}\right| \end{aligned}$$

となり, $k \leqq p$ から, $2^k \leqq 2^p$ より, $2^p-(2^k-1)>0$

$$\therefore\ x_{k+1} = \frac{2^p-(2^k-1)}{2^p+1}$$

であり, $m=k+1$ のときにも ① は成り立つ.

[1], [2] により, ① は 2 以上 $p+1$ 以下のすべての自然数 m について, 成り立つ.

ゆえに, ① から, $x_{p+1} = \dfrac{2^p-(2^p-1)}{2^p+1} = \dfrac{1}{2^p+1}$ より, $x_{p+1}=x_1$ は成立する.

(証明終わり)