1．

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を $(x-p)^2=x^2-2px+p^2$ で割ると，

$$\text{商：}\ x+a+2p,\quad \text{余り：}\ (2ap+b+3p^2)x+c-ap^2-2p^3$$

である．$f(x)$ が $(x-p)^2$ で割り切れることから余りが (恒等的に)0 なので，

$$\begin{cases}2ap+b+3p^2=0\\ c-ap^2-2p^3=0\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}b=-3p^2-2ap\\ c=2p^3+ap^2\end{cases}$$ …(答)

(2) (1) より，

$$f(x)=x^3+ax^2-(3p^2+2ap)x+2p^3+ap^2$$

よって，

$$f'(x)=3x^2+2ax-(3p^2+2ap)=(x-p)(3x+3p+2a)$$

である．$f'\left(p+\dfrac{4}{3}\right)=0$ より，

$$\left(p+\frac{4}{3}-p\right)\left\{3\left(p+\frac{4}{3}\right)+3p+2a\right\}=0$$
$$\frac{4}{3}(6p+2a+4)=0$$
$$\therefore\ a=-3p-2$$ …(答)

(3) (2) の条件のもとで $p=0$ とすると，$a=-2$，$b=c=0$ より

$$f(x)=x^3-2x^2,\quad f'(x)=3x^2-4x$$

曲線 $y=f(x)$ と $y=f'(x)$ の交点の x 座標は

$$x^3-2x^2=3x^2-4x \iff x(x-1)(x-4)=0\ \therefore\ x=0,1,4$$

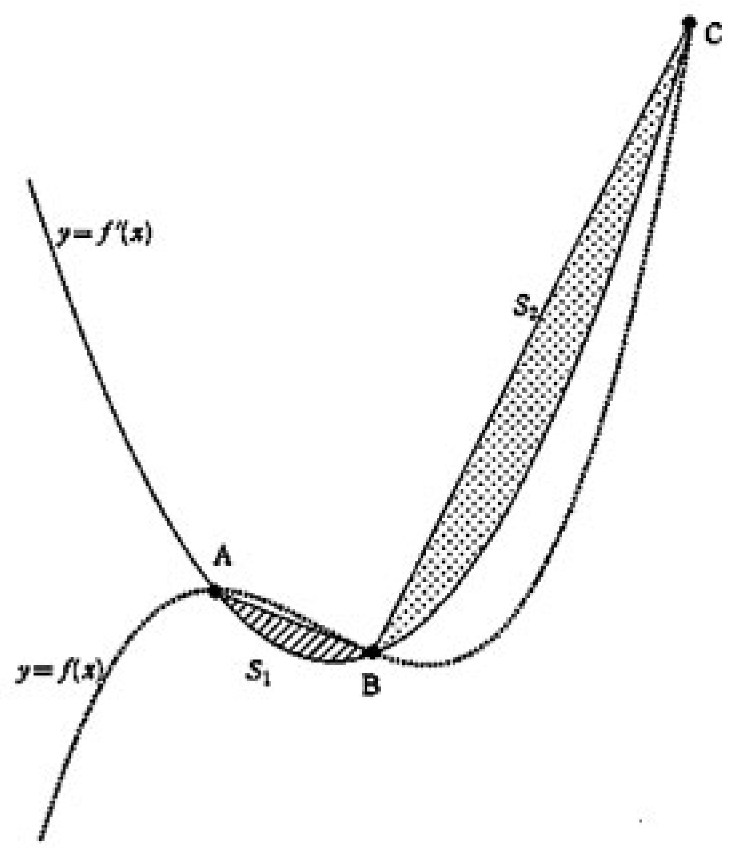
より，

$$\mathrm{A}(0,0),\ \mathrm{B}(1,-1),\ \mathrm{C}(4,32)$$

である．このとき，直線 AB の方程式を $y=g(x)$，直線 BC の方程式を $y=h(x)$ とすると

$$g(x)=-x,\ h(x)=11x-12$$

となるので，



図より

$$
\begin{aligned}
S_1+S_2&=\int_0^1\{-x-(3x^2-4x)\}dx+\int_1^4\{11x-12-(3x^2-4x)\}dx\\
&=\int_0^1\{-3x(x-1)\}dx+\int_1^4\{-3(x-1)(x-4)\}dx\\
&=-\frac{-3}{6}(1-0)^3-\frac{-3}{6}(4-1)^3\\
&=14
\end{aligned}
$$

…(答)

2.

(1)

$a_n > 0 \ \cdots$①, $b_n > 0 \ \cdots$②

を数学的帰納法によって示す.

[1] $n = 1$ のとき,

(i) より, $a_1 = b_1 = 1$ であるから, ①, ② は成り立つ.

[2] $n = k$ のとき, (k は自然数)

①, ② が成り立つ, すなわち $a_k > 0 \ \cdots$③, $b_k > 0 \ \cdots$④ と仮定する.

(ii) より, $f_k(x) = a_k(x+1)^2 + 2b_k$ であり, $y = f_k(x)$ は,

③ から, 下に凸であり, 軸が $x = -1$ の放物線である.

$f_k(x)$ は $-2 \leqq x \leqq 1$ において,

$x = 1$ で最大値 $f_k(1) = 4a_k + 2b_k = a_{k+1} \ \cdots$⑤,

$x = -1$ で最小値 $f_k(-1) = 2b_k = b_{k+1} \ \cdots$⑥

③, ④ より, $a_{k+1} > 0$, $b_{k+1} > 0$ であり, $n = k+1$ のときにも ①, ② は成り立つ.

[1], [2] により, ①, ② はすべての自然数 n について成り立つ.

(証明終わり)

(2)

⑥ より, $b_{n+1} = 2b_n$ であり, 数列 $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 2 の等比数列で,

$b_n = 2^{n-1} \ \cdots$(答)

(3)

⑤ より, $a_{n+1} = 4a_n + 2b_n$ であり, (2) の結果を用いて,

$a_{n+1} = 4a_n + 2 \cdot 2^{n-1}$

であり, 両辺を 2^{n+1} で割って,

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{4a_n + 2 \cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \ \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2\left(\frac{a_n}{2^n}\right) + \frac{1}{2}$$

$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$ より,

$$c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ c_{n+1} + \frac{1}{2} = 2\left(c_n + \frac{1}{2}\right)$$

ゆえに, 数列 $\left\{c_n + \dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $c_1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_1}{2^1} + \dfrac{1}{2} = 1$, 公比 2 の等比数列で,

$$c_n + \frac{1}{2} = 2^{n-1}$$

$$\therefore \ c_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \ \cdots \text{(答)}$$

3．

（１）　求めるものは

$$x+y=30$$

を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ の個数であり，それは

$$(x,\ y)=(1,\ 29),\ (2,\ 28),\ (3,\ 27),\ (4,\ 26),\ \cdots\cdots,\ (28,\ 2),\ (29,\ 1)$$

の 29(個) …(答)

（２）　求めるものは

$$x+y+z=30\ \cdots①$$

を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数である．

$x=k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 28)$ のとき，① は

$$k+y+z=30 \qquad \therefore\ y+z=30-k$$

となり，これを満たす自然数の組 $(y,\ z)$ は

$$(y,\ z)=(1,\ 29-k),\ (2,\ 28-k),\ (3,\ 27-k),\ \cdots\cdots,\ (28-k,\ 2),\ (29-k,\ 1)$$

の $29-k$ 組ある．よって，① を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{28}(29-k)&=28+27+26+\cdots\cdots+3+2+1\\&=\frac{28(28+1)}{2}=406(\text{個})\ \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

（３）　求めるものは，（２）の 406 個のうち，$x,\ y,\ z$ を入れ換えると重複するものを除いたものの個数である．（２）の 406 個は

$$\begin{cases}\text{（i）3つとも同じ数のもの}\\\text{（ii）3つのうち2つだけ同じ数で残り1つは異なる数のもの}\\\text{（iii）3つとも異なる数のもの}\end{cases}$$

の 3 種類に分類できる．

<u>（i）について</u>　$(x,\ y,\ z)=(10,\ 10,\ 10)$ の 1 個．

<u>（ii）について</u>　2 つだけ同じ数となる数を a，残り 1 つの数を b とすると

$$a+a+b=30 \qquad \therefore\ b=30-2a=2(15-a)$$

であり，これを満たす自然数の組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=(1,\ 28),\ (2,\ 26),\ (3,\ 24),\ \cdots\cdots,\ (14,\ 2)$$

の 14 個あるが，

$(a,\ b)=(10,\ 10)$ は（i）の場合に含まれるので，$14-1=13$ 個．

ただし，順列 $(x,\ y,\ z)$ としては，$x,\ y,\ z$ のうちどれが b になるかを考えると，${}_3\mathrm{C}_1=3$ 通りずつ重複していたので，

$$13\times3=39\ \text{個}.$$

<u>（iii）について</u>　（２）における残り $406-1-39=366$ 通りにおいて，

$x,\ y,\ z$ の順番をなくすと，$3!=6$ 通りずつ重複するので，組合せとしては

$$\frac{366}{6}=61\ \text{個}.$$

以上（i），（ii），（iii）より，求める組合せの総数は

$$1+13+61=75(\text{個})\ \cdots(\text{答})$$