2020年度 神戸大学 後期 数学 理系

1.

(1)

$f(x)=e^{4x}\cos^2 x$ より,

$$f'(x)=4e^{4x}\cos^2 x+e^{4x}\cdot 2\cos x(-\sin x)$$
$$=2e^{4x}\cos^2 x\,(2-\tan x)$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において $e^{4x}\cos^2 x>0,\ \tan x<2$ であるから,

$f'(x)>0$ であり, $f(x)$ は増加する.

(証明終わり)

(2)

$g\,(x)=e^{4x}-2-\tan x$ より,

$$g'\,(x)=4e^{4x}-\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{4}{\cos^2 x}\left(f(x)-\frac{1}{4}\right)$$

$h(x)=f(x)-\dfrac{1}{4}$ とおくと,

$g'\,(x)=\dfrac{4}{\cos^2 x}h(x)$ となり, $g'(x)$ の符号は $h(x)$ の符号に一致する.

(1) の結果より, $h\,(x)$ の増減表は,

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	m	$\nearrow$	M

となり, $m=h\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2-e^{\pi}}{4e^{\pi}}$, $M=h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2e^{\pi}-1}{4}$ であり,

$e>2,\ \pi>3$ より, $e^{\pi}>8$ であるから, $m<0,\ M>0$ である.

よって, $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ かつ $h(x)=0$ をみたす x がただ1つ存在して, それを α とおく.

$g(x)$ の増減表は,

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

である.

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\pi}-2+1=\frac{1-e^{\pi}}{e^{\pi}}<0\ ,\ g\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\pi}-3>0$$

であるから, $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において方程式 $g(x)=0$ はただ1つの実数解をもつ.

(証明終わり)

2.

$0 \leqq x \leqq e-1$ かつ $y\{y-\log(x+1)+a\} \leqq 0$ …①

（1） $f(x)=\log(x+1)-a$ とする.

$y\{y-\log(x+1)+a\} \leqq 0$ は

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq f(x) \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leqq 0 \\ y \geqq f(x) \end{cases}$$

であり，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は

$\log(x+1)-a=0$

$\log(x+1)=a$

$x+1=e^a$

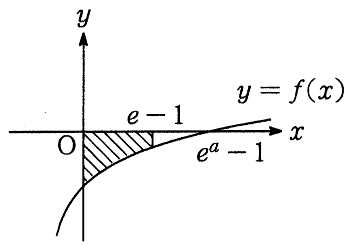
より，$x=e^a-1$

また，e^a-1 と $e-1$ の大小関係は

$$\begin{cases} a \geqq 1 \text{ のとき} \quad e^a \geqq e \text{ より，} e^a-1 \geqq e-1 \\ 0 \leqq a < 1 \text{ のとき} \quad e^a < e \text{ より，} e^a-1 < e-1 \end{cases}$$

である。

（ｉ）$a \geqq 1$ のとき



① の表す部分は図の斜線部となるので，

$$S(a)=\int_0^{e-1}\{-f(x)\}dx=-\int_0^{e-1}f(x)dx$$

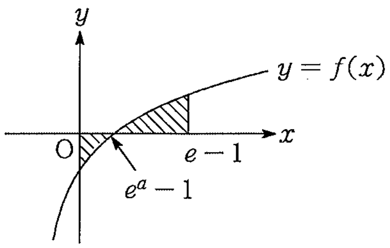
ここで，

$$\int f(x)dx=(x+1)\log(x+1)-\int(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx-ax$$
$$=(x+1)\log(x+1)-x-ax+C$$
$$=(x+1)\log(x+1)-(a+1)x+C \quad (C\text{：積分定数})$$

より，$F(x)=(x+1)\log(x+1)-(a+1)x$ とおくと，

$$S(a)=-\Big[F(x)\Big]_0^{e-1}=-F(e-1)+F(0)$$
$$=-\{e\cdot 1-(a+1)(e-1)\}+0$$
$$=(e-1)a-1$$

(ii) $0 \leqq a < 1$ のとき



① の表す部分は図の斜線部となるので，

$$S(a)=\int_0^{e^a-1}\{-f(x)\}dx+\int_{e^a-1}^{e-1}f(x)dx$$
$$=-\int_0^{e^a-1}f(x)dx+\int_{e^a-1}^{e-1}f(x)dx$$
$$=-\Big[F(x)\Big]_0^{e^a-1}+\Big[F(x)\Big]_{e^a-1}^{e-1}$$
$$=-2\cdot F(e^a-1)+F(0)+F(e-1)$$
$$=-2\{e^a\cdot a-(a+1)(e^a-1)\}+0+\{-(e-1)a+1\}$$
$$=2e^a-(e+1)a-1$$

以上より，$S(a)=\begin{cases}2e^a-(e+1)a-1 & (0\leqq a<1\text{ のとき})\\ (e-1)a-1 & (1\leqq a\text{ のとき})\end{cases}$ …(答)

(2) ・$a>1$ のとき　$S'(a)=e-1>0$　($2<e<3$ より)

・$0<a<1$ のとき　$S'(a)=2e^a-(e+1)$

であり，$2e^a-(e+1)=0$ のとき　$e^a=\dfrac{e+1}{2}$　　$\therefore\ a=\log\dfrac{e+1}{2}$

$2<e<3$ より，$\dfrac{3}{2}<\dfrac{e+1}{2}<2$　　$\therefore\ 0<\log\dfrac{3}{2}<\log\dfrac{e+1}{2}<\log 2<1$

となるので，$S(a)$ の増減は次の表のようになる．

a	0	$\cdots$	$\log\dfrac{e+1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$		$+$
$S(a)$		↘		↗	$e-2$	↗

したがって，$a=\log\dfrac{e+1}{2}$ のときに $S(a)$ は最小となり，最小値は

$$S\left(\log\frac{e+1}{2}\right)=2\cdot\frac{e+1}{2}-(e+1)\cdot\log\frac{e+1}{2}-1$$
$$=e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}\ \cdots(\text{答})$$

３．

（１）　$f_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\left\{e^{-x}-1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right\}$

より，

$$f_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\left\{e^{-x}-1-\left(\frac{-1}{1!}x+\frac{(-1)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}\right)\right\}$$

であるから，

$$\begin{aligned}f'_{n+1}(x)&=(-1)^{n+1}\left\{-e^{-x}-0-\left(-1+\frac{(-1)^2}{1!}x+\cdots+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^n\right)\right\}\\&=(-1)^{n+1}\left\{-e^{-x}+1+\left(\frac{-1}{1!}x+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)\right\}\\&=(-1)^n\left\{e^{-x}-1-\left(\frac{-1}{1!}x+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)\right\}\\&=f_n(x)\end{aligned}$$

よって，成立する．（証明終わり）

（２）n に関する数学的帰納法で示す．

（Ⅰ）$n=1$ のとき，

$$f_1(x)=-\left\{e^{-x}-1-\frac{-1}{1!}x\right\}=-e^{-x}+1-x$$

より，

$$f_1'(x)=e^{-x}-1$$

よって，$x>0$ のとき，$f_1'(x)<0$ より $f_1(x)$ は減少し，これと $f_1(0)=0$ より，$f_1(x)<0$ であるから，$n=1$ のときは成立する．

（Ⅱ）$n=l$ のとき，

$x>0$ のとき，$f_l(x)<0$ が成立することを仮定する．このとき，（１）より，

$$f'_{l+1}(x)=f_l(x)<0$$

よって，$f_{l+1}(x)$ は減少し，これと $f_{l+1}(0)=0$ より，$f_{l+1}(x)<0$ であるから，$n=l+1$ のときも成立する．

以上より，すべての自然数 n について，$x>0$ のとき $f_n(x)<0$ である．（証明終わり）

（3）　$f_{2n}(x)=(-1)^{2n}\left\{e^{-x}-1-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right\}=e^{-x}-1-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$

ここで，（2）より $x>0$ のとき $f_{2n}(x)<0$ であるから，$x=1$ とすると，

$$f_{2n}(1)=e^{-1}-1-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1}-a_{2n}<0$$

$$\therefore\quad e^{-1}<a_{2n}\quad\cdots①$$

また，

$$f_{2n+1}(x)=(-1)^{2n+1}\left\{e^{-x}-1-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right\}=-\left(e^{-x}-1-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)$$

同様に，

$$f_{2n+1}(1)=-\left(e^{-1}-1-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}\right)=-e^{-1}+\left(1+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=-e^{-1}+a_{2n}+\frac{-1}{(2n+1)!}<0$$

$$\therefore\quad a_{2n}<e^{-1}+\frac{1}{(2n+1)!}\quad\cdots②$$

①，②と，$n\to\infty$ のとき $\frac{1}{(2n+1)!}\to 0$ であることから，

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=e^{-1}\quad\cdots（答）$$

4．

(1)　$z=\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}$ より

$$|z|=\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{\pi}{9}}=1,\quad \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{9}$$

A(0)，C(z)，D(z^4) に対して

$$\mathrm{AC}=|z|=1,\quad \mathrm{AD}=|z^4|=|z|^4=1$$

$z^4=\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)^4=\cos\dfrac{4}{9}\pi+i\sin\dfrac{4}{9}\pi$ より $\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{4}{9}\pi$ であるから

$$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{BAD}-\angle\mathrm{BAC}=\frac{4}{9}\pi-\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3}$$

したがって，△ACD は正三角形である．

（証明終わり）

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を表す複素数は　$(z+z^5)-z=z^5$

F(z^5) とすると $z^5=\cos\dfrac{5}{9}\pi+i\sin\dfrac{5}{9}\pi$ より　$\angle\mathrm{BAF}=\dfrac{5}{9}\pi$

△ABC において AB＝AC であるから

$$\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}(\pi-\angle\mathrm{BAC})=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\frac{4}{9}\pi$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AF}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\quad（t\text{ は実数}）$$

したがって，3 点 B，C，E は同一直線上にある．

（証明終わり）

(3)　(2)より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ であり，さらにAC＝AFであるから

四角形 ACEF はひし形である．したがって

$$\angle\mathrm{CAE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{CAF}=\frac{1}{2}(\angle\mathrm{BAF}-\angle\mathrm{BAC})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\frac{2}{9}\pi$$

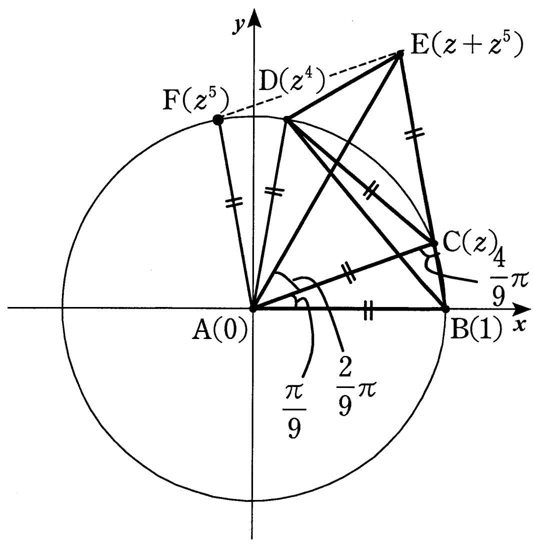
また，(1)より AC＝CD であるから

$$\mathrm{AC}=\mathrm{CD}=\mathrm{CE}$$

これより

△CDE は CD＝CE の二等辺三角形

△CAE は CA＝CE の二等辺三角形



よって

$$\angle \mathrm{DCE}=\pi-(\angle \mathrm{ACB}+\angle \mathrm{ACD})=\pi-(\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACD})$$
$$=\pi-\left(\frac{4}{9}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{9}\pi$$

$$\angle \mathrm{AED}=\angle \mathrm{CED}-\angle \mathrm{CEA}=\frac{1}{2}(\pi-\angle \mathrm{DCE})-\angle \mathrm{CAE}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2}{9}\pi\right)-\frac{2}{9}\pi=\frac{7}{18}\pi-\frac{2}{9}\pi=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}} \quad \cdots(\text{答})$$

5.

$a_i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ であり，いずれも同様に確からしい．

(1) $x_0 = \dfrac{1}{2}$ より，$x_1 = \dfrac{1}{4}a_1$

$x_2 = a_2x_1(1-x_1)$ であり，$x_1 > 0$ より，$x_2 = 0$ となるのは，$x_1 = 1$ のときのみである．すなわち，$a_1 = 4$ のときであるから

$$p_2 = \frac{1}{6} \ \cdots\ (答)$$

$x_2 > 0$ となるのは，$0 < x_1 < 1$ のときである．すなわち，$a_1 = 1,\ 2,\ 3$ のときであるから

$$q_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ \cdots\ (答)$$

(2) a_1，x_1，x_2 の値を表にまとめると

a_1	1	2	3	4	5	6
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	$\frac{3}{16}a_2$	$\frac{1}{4}a_2$	$\frac{3}{16}a_2$	0	$-\frac{5}{16}a_2$	$-\frac{3}{4}a_2$

$x_3 = a_3x_2(1-x_2)$ であるから，$x_3 = 0$ となるのは，$x_2 = 0$ または $x_2 = 1$ のときである．

- $x_2 = 0$ となる確率は，(1) より，$p_2 = \dfrac{1}{6}$
- $x_2 = 1$ となるのは，$x_2 = \dfrac{1}{4}a_2$ かつ $a_2 = 4$ のとき，すなわち $a_1 = 2,\ a_2 = 4$ であるから，この場合の確率は $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$

したがって

$$p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36} \ \cdots\ (答)$$

$x_3 > 0$ となるのは，$0 < x_2 < 1$ のときである．
$x_2 = \dfrac{3}{16}a_2$ かつ $a_2 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の場合と $x_2 = \dfrac{1}{4}a_2$ かつ $a_2 = 1,\ 2,\ 3$ の場合がある。すなわち，$a_1 = 1,\ 3$ かつ $a_2 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の場合と $a_1 = 2$ かつ $a_2 = 1,\ 2,\ 3$ の場合であるから，この確率は

$$q_3 = \frac{2}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{13}{36} \ \cdots\ (答)$$

(3) $a_4 = 1$ であるから，$x_4 = x_3(1 - x_3)$

$x_4 = 0$ となるのは，$x_3 = 0$ または $x_3 = 1$ のときである．

- $x_3 = 0$ となる確率は，(2) より，$p_3 = \dfrac{7}{36}$
- $x_3 = 1$ となるのは，(2) の $x_3 > 0$ の場合を考えればよい．

  $x_3 = a_3 x_2(1 - x_2)$ が 1 となるには，$x_2(1 - x_2)$ が $\dfrac{1}{k}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ とならなければならない．

  $x_2 = \dfrac{3}{16}a_2$ かつ $a_2 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の場合はいずれにしても不適当であり，$x_2 = \dfrac{1}{4}a_2$ かつ $a_2 = 1,\ 2,\ 3$ の場合は $a_2 = 2$ のときのみ $x_2 = \dfrac{1}{2}$ となり条件を満たす．このとき $a_3 = 4$ であるから，$a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$ のときのみであり，この確率は $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{216}$

よって

$$p_4 = \frac{7}{36} + \frac{1}{216} = \frac{43}{216} \ \cdots \ (答)$$