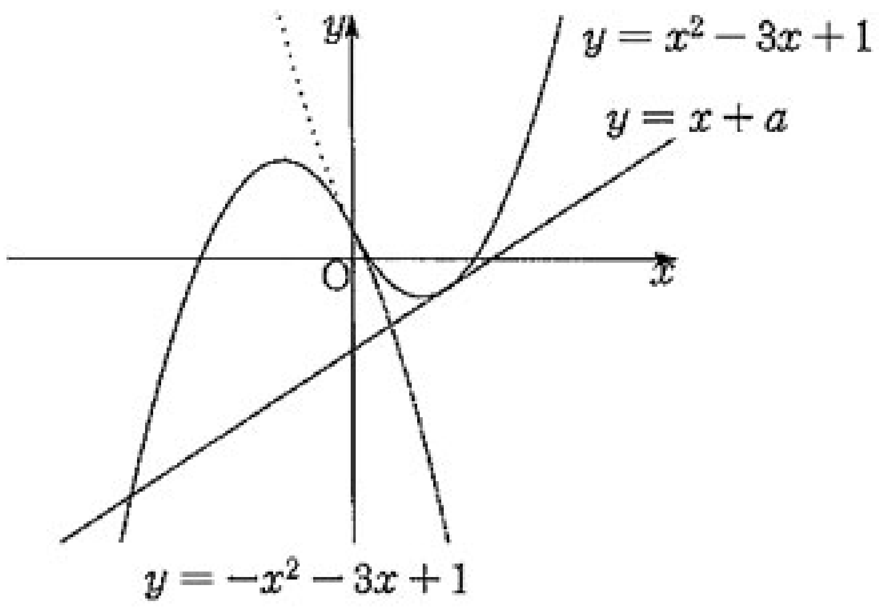
$\boxed{1}$



曲線 C は

$x \geqq 0$ のとき $y=x^2-3x+1$

$x<0$ のとき $y=-x^2-3x+1$

だから右図のとおり．a は負であるから l と C が接するのはグラフより l と曲線 $y=x^2-3x+1$ が接するときである．2式より y を消去すると

$x^2-4x+1-a=0$ ……①

これが重解をもつので判別式を D とすると

$D/4=2^2-(1-a)=0 \quad \therefore a=-3$

このとき ① の解は $x=2$

$y=x-3$ と $y=-x^2-3x+1 (x<0)$ の交点の x 座標は

$-x^2-3x+1=x=3$ つまり $x^2+4x-4=0$ より $x=-2-2\sqrt{2}$

題意の領域は下図1である．これを下図2のように分割して面積を求めると

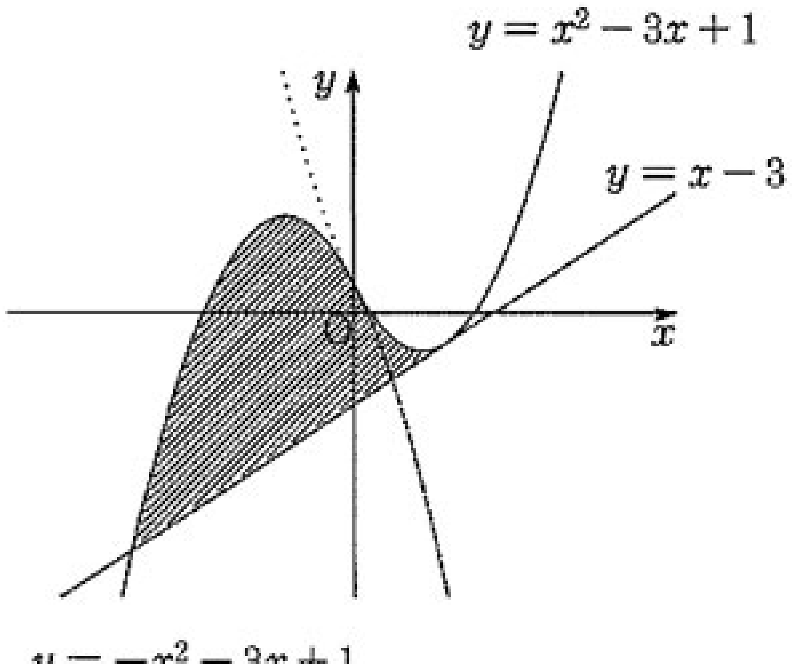


図1

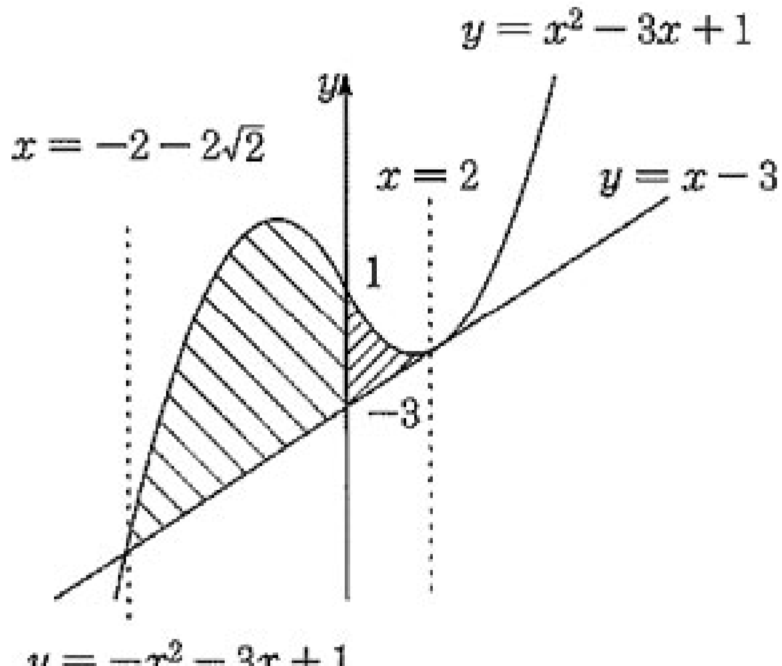


図2

$$\int_{-2-2\sqrt{2}}^{0}\{(-x^2-3x+1)-(x-3)\}\,dx+\int_{0}^{2}\{(x^2-3x+1)-(x-3)\}\,dx$$

$$=\int_{-2-2\sqrt{2}}^{0}\{-(x+2)^2+8\}\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}(x+2)^3+8x\right]_{-2-2\sqrt{2}}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{32}{3}\sqrt{2}+16 \text{ ……(答)}$$

$\boxed{2}$

$g(x)=x^2$. 求める2次関数を $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおく. $y=f(x),\ y=g(x)$ より y を消去すると

$$ax^2+bx+c=x^2\ \therefore (a-1)x^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots①$$

① が異なる2実数解をもつことが必要だから判別式を D とすると

$$a\neq 1,\ D=b^2-4(a-1)c>0 \quad \cdots\cdots②$$

このもとで ① の2解を $\alpha,\ \beta$ とすると, 2つの放物線が直交する条件より

$$f'(\alpha)\cdot g'(\alpha)=-1,\ f'(\beta)\cdot g'(\beta)=-1$$

$$4a\alpha^2+2b\alpha+1=0,\ 4a\beta^2+2b\beta+1=0$$

$\alpha,\ \beta$ は異なる2実数だから

$$4ax^2+2bx+1=0 \quad \cdots\cdots③$$

の2解が $\alpha,\ \beta$ である. ①, ③ の2解が一致する. $a\neq 0,1$ だから ① の辺々を $a-1$ で割った右辺と ③ の辺々を a で割った右辺は恒等的に一致するので

$$x^2+\frac{b}{a-1}x+\frac{c}{a-1}=x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{1}{4a}$$

は恒等式である. 係数比較を行い

$$\frac{b}{a-1}=\frac{b}{2a} \quad \cdots\cdots④ \qquad \frac{c}{a-1}=\frac{1}{4a} \quad \cdots\cdots⑤$$

④ より $b=0$ または $a=-1$

(i) $b=0$ のとき ⑤ より $c=\dfrac{a-1}{4a}$

このとき ② より $D=-\dfrac{(a-1)^2}{a}>0\ \therefore a<0$

したがって $y=ax^2+\dfrac{a-1}{4a}\ (a<0)$

(ii) $a=-1$ のとき ⑤ より $c=\dfrac{1}{2}$

このとき ② より $D=b^2+4>0\ \therefore b$ は任意の実数

したがって $y=-x^2+bx+\dfrac{1}{2}$ (b は任意の実数)

以上より求める2次関数は

$$\boldsymbol{y=ax^2+\frac{a-1}{4a}\ (a<0)} \text{ または } \boldsymbol{y=-x^2+bx+\frac{1}{2}} \ (\boldsymbol{b} \text{ は任意の実数}) \cdots\cdots(\text{答})$$

文系$\boxed{3}$

m, n の偶奇に対する mn^2, am^2, n^2 の偶奇により，$f(m,n)$ の偶奇を求めた結果をまとめると，次の表のようになる．

m	n	mn^2	am^2	n^2	$f(m,n)$
偶数	偶数	偶数	偶数	偶数	偶数
偶数	奇数	偶数	偶数	奇数	奇数
奇数	偶数	偶数	奇数	偶数	奇数
奇数	奇数	奇数	奇数	奇数	奇数

よって，$f(m,n)$ が 16 で割り切れるためには，m, n がともに偶数であることが必要である．
したがって，$m = 2k, n = 2l$ (k, l は整数) と表され，このとき，
$f(m,n) = 4(2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2)$ となる．
ここで，k, l の偶奇に対する ak^2, l^2 の偶奇により，$2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2$ の偶奇を求めた結果をまとめると，次の表のようになる．

k	l	ak^2	l^2	$2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2$
偶数	偶数	偶数	偶数	偶数
偶数	奇数	偶数	奇数	奇数
奇数	偶数	奇数	偶数	奇数
奇数	奇数	奇数	奇数	偶数

よって，$f(m,n)$ が 16 で割り切れるためには，k, l がともに偶数であるか，または k, l がともに奇数であることが必要である．
ここで k, l がともに偶数であるとすると，
$k = 2b, l = 2c$ (b, c は整数) と表され，
$f(m,n) = 16(4bc^2 + ab^2 + c^2) + 8$ となり，$f(m,n)$ は 16 で割り切れない．
よって，k, l がともに奇数であることが必要であるから，
$k = 2b + 1, l = 2c + 1$ (b, c は整数) と表される．このとき，

$f(m,n) = 16(4bc^2 + 4bc + b + 3c^2 + 3c + ab^2 + ab + 1) + 4(a + 1)$ となり，
これが 16 で割り切れるための条件は $a + 1$ が 4 で割り切れることである．
以上より，$f(m,n)$ が 16 で割り切れるような整数 m, n が存在するための条件は，
a を 4 で割った余りが 3 となることである．$\cdots\cdots$(答)

文系 $\boxed{4}$

点Aと点Bが一致するとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=1$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}$ に反する．よって，点Aと点Bは異なる．

ABの中点をMとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\right)=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$$

よって，3点O,C,Dは，点Mを通り $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な平面上にある．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2=\dfrac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\right)=\dfrac{3}{4}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より，

$\cos\angle\mathrm{COM}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ よって，$\angle\mathrm{COM}=\dfrac{3}{4}\pi$

また $\cos\angle\mathrm{COD}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|}=\dfrac{1}{2}$ よって，$\angle\mathrm{COD}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，

$\angle\mathrm{MOD}=\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{12}\pi$ または $\angle\mathrm{MOD}=2\pi-\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{11}{12}\pi$

(i) $\angle\mathrm{MOD}=\dfrac{5}{12}\pi$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\cos\frac{5}{12}\pi=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

(ii) $\angle\mathrm{MOD}=\dfrac{11}{12}\pi$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\cos\frac{11}{12}\pi=\frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)=k>0$ より，

$k=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ ··(答)

文系 $\boxed{5}$

第 i 行 j 列の数を a_{ij} と記す．

第１行の並べ方は１〜４の順列の総数に等しく $4!=24$ 通り．

第１行を $\boxed{x\,|\,y\,|\,z\,|\,w}$ とすると $a_{21}\neq x$，$a_{22}\neq y$，$a_{23}\neq z$，$a_{24}\neq w$．この条件をみたすのは，次の (甲)，(乙) のいずれかの９通り．

(甲)

第1行	x	y	z	w
第2行	y	x	w	z

，

第1行	x	y	z	w
第2行	z	w	x	y

，

第1行	x	y	z	w
第2行	w	z	y	x

(乙)

第1行	x	y	z	w
第2行	y	z	w	x

，

第1行	x	y	z	w
第2行	y	w	x	z

第1行	x	y	z	w
第2行	z	w	y	x

，

第1行	x	y	z	w
第2行	z	x	w	y

第1行	x	y	z	w
第2行	w	z	x	y

，

第1行	x	y	z	w
第2行	w	x	y	z

(i) (甲) の場合

第1行	x	y	z	w
第2行	y	x	w	z

とする．

a_{31}，a_{33} の選び方はそれぞれ２通り．

$(a_{32},\ a_{34})$ は $(a_{31},\ a_{33})$ が決まれば１通りに決まるから，

$(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)=4$ 通り

他の場合も同数．

第３行が決まれば第４行は１通りに決まるから，

$3\cdot 4\cdot 1=12$ 通り

(ii) (乙) の場合

第1行	x	y	z	w
第2行	y	z	w	x

とする．

$a_{31}=z,\ w$ のいずれか．

$a_{31}=z$ ならば，$a_{34}=y$，$a_{33}=x$，$a_{32}=w$ の順に１通りに決まる．$a_{31}=w$ ならば，$a_{32}=x$，$a_{33}=y$，$a_{34}=z$ の順に１通りに決まる．したがって２通り．他の場合も同数．

第３行が決まれば第４行は１通りに決まるから，

$6\cdot 2\cdot 1=12$ 通り

(i)，(ii) より，

$24\cdot(12+12)=576$ 通り　　…………(答)