〔１〕

(1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=3(x-a)^2+a^3-40$ とする．

$$f(x)=g(x)$$

$$x^2=3x^2-6ax+3a^2+a^3-40$$

$$\therefore\ 2x^2-6ax+a^3+3a^2-40=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

C_1 と C_2 が異なる２点で交わる条件は，(*) が異なる２つの実数解をもつことであるから

$$\frac{D}{4}>0 \quad ((*)\text{の判別式を}\ D\ \text{とした})$$

$$9a^2-2(a^3+3a^2-40)>0$$

$$2a^3-3a^2-80<0$$

$$(a-4)(2a^2+5a+20)<0$$

$$a-4<0 \quad (\because\ a\geqq 0\ \text{より，}\ 2a^2+5a+20>0)$$

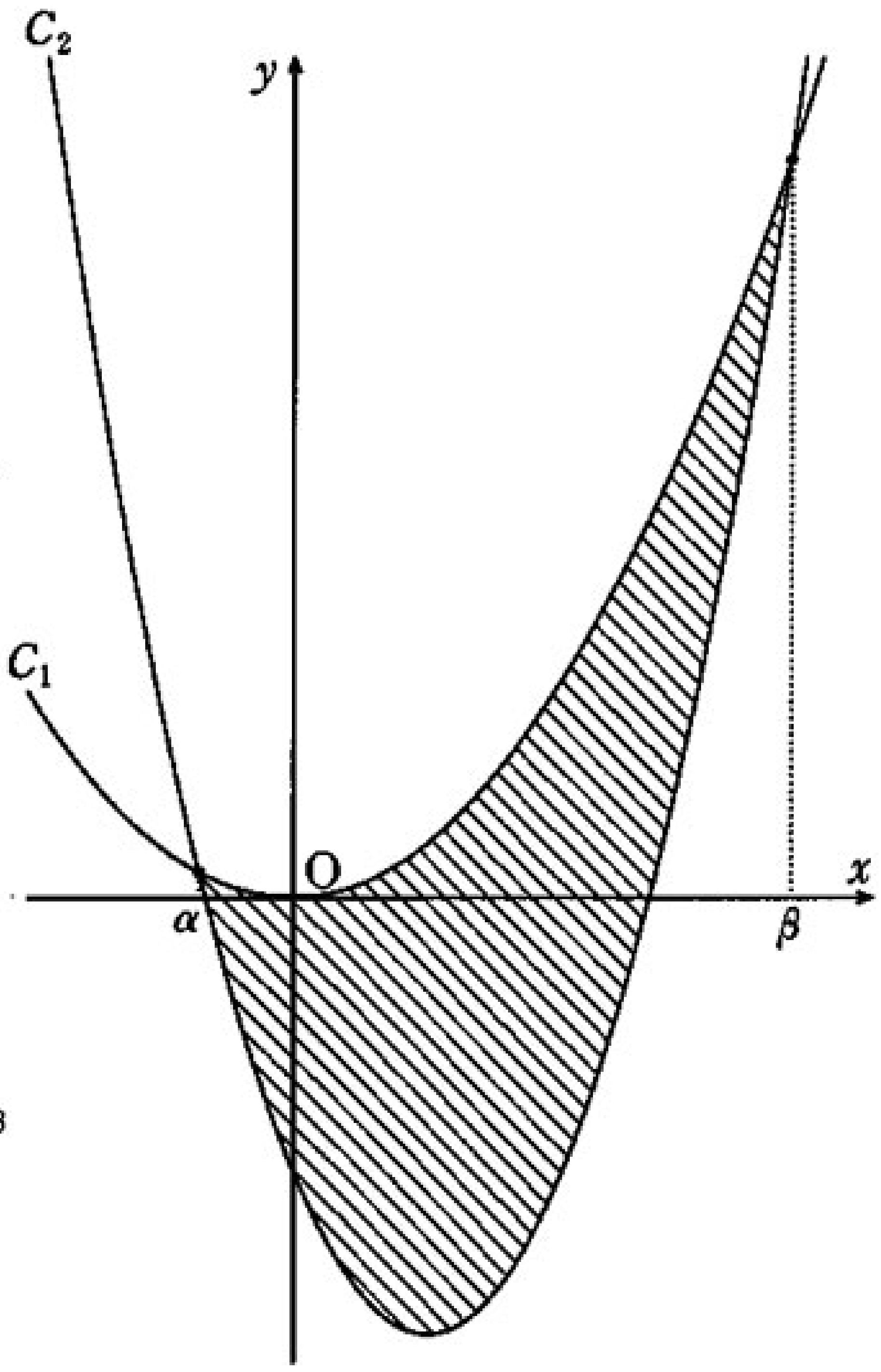
$$\therefore\ 0\leqq a<4 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(*) の２解を α，β ($\alpha<\beta$) とすると

$$f(x)-g(x)$$
$$=-2x^2+6ax-a^3-3a^2+40$$
$$=-2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ においては $-2(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0$ であるから，$f(x)\geqq g(x)$

よって，C_1 と C_2 で囲まれた図形は右図の斜線部であり



$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{-2(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$

$$=-2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3a+\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}-\frac{3a-\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{D}{4}}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{-2a^3+3a^2+80})^3$$

ここで，$h(a)=-2a^3+3a^2+80$ とすると

$$h'(a)=-6a^2+6a$$
$$=-6a(a-1)$$

(1) より，$0\leqq a<4$ であるから，$h(a)$ の増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$		$\nearrow$	81	$\searrow$	

よって，$S=\dfrac{1}{3}(\sqrt{h(a)})^3$ は $a=1$ のとき

最大値 243　……(答)

をとる．

［2］

(1) 正四面体のすべての辺の長さは等しい。よって，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2$ だから，

$$2=1+p^2$$

$p>0$ より $p=1$

また，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OC}^2$，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{AC}^2$，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{BC}^2$ だから，

$$\begin{cases}2=q^2+r^2+s^2\\2=(q-1)^2+(r-1)^2+s^2\\2=(q-1)^2+r^2+(s-1)^2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}2=q^2+r^2+s^2\\2=(q-1)^2+(r-1)^2+s^2\\r=s\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}2=q^2+2s^2\\1=q+s\\r=s\end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned}&2=(1-s)^2+2s^2\\&0=3s^2-2s-1\\&0=(3s+1)(s-1)\\&\therefore\ s=1,\ -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$s>0$ より，$s=1$

よって，$r=1$，$q=0$。以上より，

$$p=1,\ q=0,\ r=1,\ s=1 \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) z 軸に垂直な平面を $z=t$ とする。

$t<0$，$1<t$ のときは，正四面体と共有点をもたないので，$0\leqq t\leqq 1$ で考える。

$z=t$ と 辺 OB，AB，AC，OC の交点をそれぞれ D，E，F，G とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t,\ 0,\ t)$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1-t,\ t)$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-t,\ 1,\ t)$

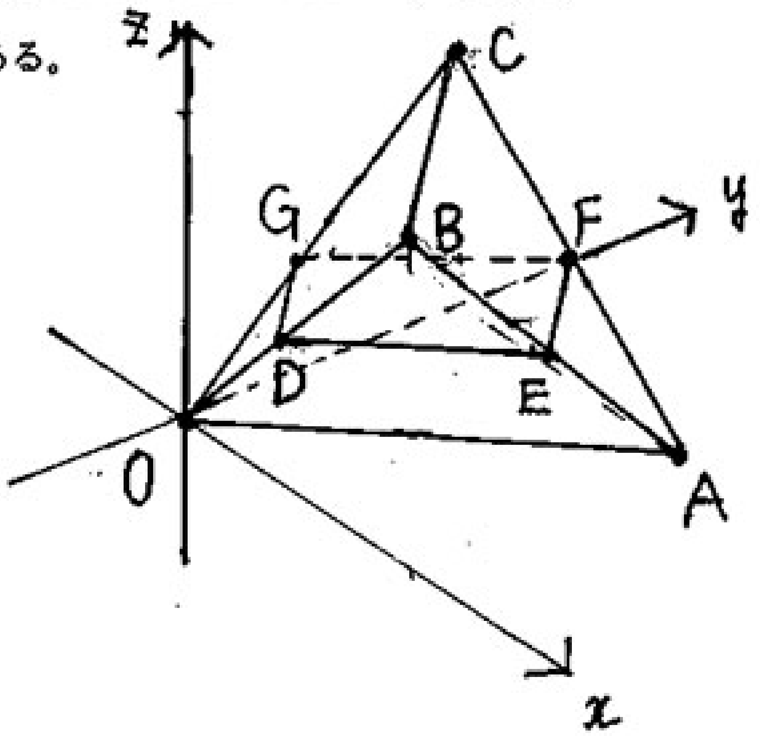
$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ t,\ t)$ であるから．

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t,\ 1-t,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t,\ 1-t,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(-t,\ t,\ 0)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{GF}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=0$ だから，四角形 DEFG は長方形である。

断面積を S とすると，$S=|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{DG}}|$

$0\leqq t\leqq 1$ だから，$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=\sqrt{2}(1-t)$，$|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|=\sqrt{2}\,t$ なので



$$\begin{aligned}S&=2(1-t)t\\&=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ (答)

〔3〕

(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=p$ とおくと，$\sqrt{3}i=2p-1$ であり，両辺を 2 乗すると，

$-3=4p^2-4p+1 \quad \therefore\ p^2-p+1=0 \cdots ①$

$f(x)$ を x^2-x+1 で割って，商と余りを求めると

$f(x)=(x^2-x+1)(x+a+1)+(a+b)x-a+c-1$

条件より $f(p)=0$ であるから，① を用いると

$(a+b)p-a+c-1=0$

a, b, c は実数，p は虚数であるから $a+b=0$ かつ $-a+c-1=0$

したがって，$a=c-1$, $b=-c+1$ …… (答)

(2) (1) より $f(x)=x^3+(c-1)x^2+(-c+1)x+c$ となるから，

$$\begin{cases} f(1)=1+c-1-c+1+c=c+1 \\ f(-1)=-1+c-1-(-c+1)+c=3c-3 \end{cases}$$

条件より，整数 k, l を用いて

$$\begin{cases} c+1=7k+4 \cdots ② \\ 3c-3=11l+2 \cdots ③ \end{cases}$$

とおける。

② × 3 − ③ より $6=21k-11l+10 \quad \therefore\ 21k-11l=-4 \cdots ④$

④ と $21\times4-11\times8=-4$ とを辺々引くと

$21(k-4)-11(l-8)=0 \quad \therefore\ 21(k-4)=11(l-8)$

$21(k-4)$ は 11 の倍数であり，21 と 11 は互いに素であるから，$k-4$ が 11 の倍数になる。

$k-4=11m$ (m は整数) とおくと $21\times11m=11(l-8) \quad \therefore\ l-8=21m$

よって，④ を満たす整数 k , l は $k=11m+4$, $l=21m+8$ (m は整数) とかける。

② より $c+1=7(11m+4)+4 \quad \therefore\ c=77m+31$

$|c|\leqq40$ より $-40\leqq77m+31\leqq40 \quad \therefore\ -\dfrac{71}{77}\leqq m\leqq\dfrac{9}{77}$

これを満たす整数 m は $m=0$ であり，$c=31$ となる。

したがって，$f(x)=x^3+30x^2-30x+31=x(x^2-x+1)+31(x^2-x+1)$

$=(x+31)(x^2-x+1)$

となるから，$f(x)=0$ の解は $x=-31$, $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ …… (答)

(参考)　(1) で ① を用いると $p^3+1=(p+1)(p^2-p+1)=0$ となる。

よって，$p^3=-1$, $p^2=p-1$ となり，$f(p)=p^3+ap^2+bp+c=0$ より

$$-1+a(p-1)+bp+c=0 \quad \therefore\ (a+b)p-a+c-1=0$$

〔4〕 4個のサイコロの目の出方の総数は 6^4 通りある。

(1) 余事象は、「X が25の倍数にならない」だから、

(i) X が5の倍数にならない

(ii) X が5の倍数になるが、25の倍数にならない

のいずれかである。よって、求める確率は、

$$1-\frac{5^4+{}_4C_1\cdot 5^3}{6^4}=1-\frac{125}{144}=\frac{19}{144} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) 余事象は、「X が4の倍数にならない」だから、

(i) 1、3、5の目だけが出る

(ii) 2、6の目が1個出て、1、3、5の目が3個出る

のいずれかである。よって、求める確率は、

$$1-\frac{3^4+{}_4C_1\cdot 2\cdot 3^3}{6^4}=1-\frac{11}{48}=\frac{37}{48} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3) X が $100=2^2\cdot 5^2$ の倍数となるのは、

(i) 2、6の目が2個出て、5の目が2個出る

(ii) 4の目が少なくとも1個出て、5の目が少なくとも2個出る

のいずれかである。

(ii)は (ア) 4の目が2個出て、5の目が2個出る

(イ) 4の目が1個出て、5の目が3個出る

(ウ) 4の目が1個出て、5の目が2個出て、1, 2, 3, 6の目が1個出る

のいずれかである。よって、求める確率は、

$$\frac{{}_4C_2\cdot 2^2+{}_4C_2+{}_4C_1+{}_4C_1\cdot {}_3C_2\cdot 4}{6^4}$$

$$=\frac{3\cdot 2^2+3+2+2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 6^3}$$

$$=\frac{41}{648} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$