2020年度 大阪市立大学 前期 数学 理系

第１問

問１

$$\sin x = \sin(x-\alpha)$$
$$\sin x - \sin(x-\alpha) = 0$$
$$2\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ より，$\sin\frac{\alpha}{2}>0$ であり，$x>0$ より $x-\frac{\alpha}{2}>-\frac{\alpha}{2}$ $\left(>-\frac{\pi}{2}\right)$ であるから，

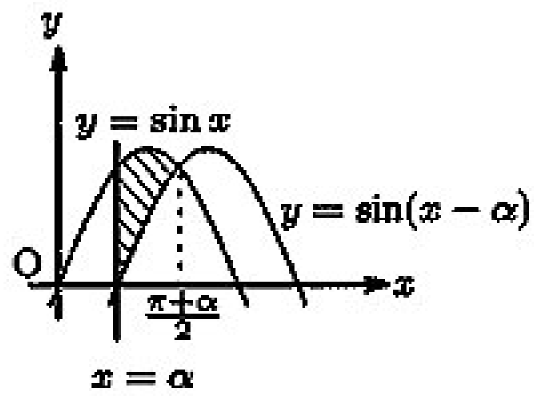
$\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)=0$ を満たす最小の正の x は

$$x-\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ x=\frac{\pi+\alpha}{2}$$

また，$\sin\frac{\pi+\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$ であるから，P の座標は $\left(\frac{\pi+\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}\right)$ ……(答)

問２

$c=\frac{\pi+\alpha}{2}$ であり，$\alpha\leqq x\leqq\frac{\pi+\alpha}{2}$ かつ $\sin(x-\alpha)\leqq y\leqq\sin x$ で表される図形を x 軸の周りに回転させるので，



$$\begin{aligned}
V(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\left\{\pi\sin^2 x-\pi\sin^2(x-\alpha)\right\}dx\\
&= \pi\int_{\alpha}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos(2x-2\alpha)}{2}\right\}dx\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\left\{\cos(2x-2\alpha)-\cos 2x\right\}dx\\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin(2x-2\alpha)}{2}-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\alpha}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sin(\pi-\alpha)-\sin(\pi+\alpha)}{2}-\frac{\sin 0-\sin 2\alpha}{2}\right\}\\
&= \left(\frac{\sin\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)\pi
\end{aligned}$$

……(答)

問３

$$\begin{aligned}
V'(\alpha) &= \left(\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\cos 2\alpha}{2}\right)\pi\\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\cos\alpha+(2\cos^2\alpha-1)\right\}\\
&= \frac{\pi}{2}(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)
\end{aligned}$$

よって，$V'(\alpha)=0$ のとき，$\cos\alpha=\frac{1}{2},\ -1$ であり，$0<\alpha<\pi$ より，$\alpha=\frac{\pi}{3}$

よって，増減表は右のようになり，$V(\alpha)$ の最大値は

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$V'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$V(\alpha)$		↗	max	↘	

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\pi\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi
\end{aligned}$$

……(答)

第２問

問１

$f(x)=x^3-3x^2+px+q$ とする．$f(\alpha)=0$ より，

$$\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q=0$$

が成り立つ．ここで，p，q は実数より，$p=\overline{p}$，$q=\overline{q}$ に注意すると，

$$\begin{aligned} f(\overline{\alpha}) &= (\overline{\alpha})^3-3(\overline{\alpha})^2+p(\overline{\alpha})+q \\ &= \overline{\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q}=0 \end{aligned}$$

ここで，α は虚数より，$\alpha\neq\overline{\alpha}$ である．

したがって，

α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう１つの虚数解である　　（証明終わり）

問２

複素数平面上において，α，$\overline{\alpha}$，b の表す点をそれぞれ A，A$'$，B とする．

$|\alpha-\overline{\alpha}|=2\sqrt{3}$ より $\mathrm{AA'}=2\sqrt{3}$，$|\alpha-b|=|\overline{\alpha}-b|=2\sqrt{3}$ より $\mathrm{AB}=\mathrm{A'B}=2\sqrt{3}$ であるから，

$\triangle\mathrm{AA'B}$ は１辺の長さ $2\sqrt{3}$ の正三角形である．

線分 AA$'$ の中点を M とすると，$\mathrm{M}(r)$ より，

$$|r-b|=\mathrm{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}=3$$

したがって，求める値は

$$|r-b|=3$$　　……（答）

問３

問２の仮定の下で，$f(x)=0$ の解は問１の主張より，

$$x=b,\ r\pm\sqrt{3}i\ \ (b,\ r\text{ は実数})$$

と表せ，

$$x^3-3x^2+px+q=(x-b)\{x-(r+\sqrt{3}i)\}\{x-(r-\sqrt{3}i)\}\ \ (\text{恒等式})$$

が成り立つ．このとき，

$$(\text{右辺})=(x-b)(x^2-2rx+r^2+3)=x^3-(2r+b)x^2+(2rb+r^2+3)x-b(r^2+3)$$

であるから，係数を比較して，

$$\begin{cases} 3=2r+b & \cdots\cdots① \\ p=2rb+r^2+3 & \cdots\cdots② \\ q=-b(r^2+3) & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

問 2 の結果と①より，$r=0,2 \quad \therefore \quad (r,b)=(0,3),(2,-1)$
これを②，③に代入すると，$(p,q)=(3,-9),(3,7)$
したがって，求める組は

$$(p,q)=(3,-9),(3,7)$$ ……（答）

第３問

問１

関数 $y=\dfrac{1}{x}$ は $x>0$ において減少関数である．自然数 k に対して，

$k<x<k+1$ のとき，$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$ であるから，

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx \qquad \therefore \int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$$

上の式で $k=m, m+1, \cdots, n$ とおき，辺々を加えると，

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots①$$

また，関数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ は $x>1$ において減少関数である．２以上の自然数 k に対して，

$k<x<k+1$ のとき，$\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{x-1}$ であるから，

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x-1} \qquad \therefore \frac{1}{k}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x-1}$$

上の式で $k=m, m+1, \cdots, n$ とおき，辺々を加えると，

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}<\int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より，

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}<\int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

問２

①に $m=3, n=2019$ を代入すると，

$$\int_3^{2020}\frac{dx}{x}<\sum_{k=3}^{2019}\frac{1}{k}$$

両辺に $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2020}$ を加えると，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2020}+\int_3^{2020}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2020}+\Big[\log|x|\Big]_3^{2020}<\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2020}+\log 2020-\log 3<\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2020}+7.61-1.10<\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$$

$$\therefore 8.01 + \frac{1}{2020} < \sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots ③$$

②に $m = 2,\ n = 2020$ を代入すると，

$$\sum_{k=2}^{2020} \frac{1}{k} < \int_{2}^{2021} \frac{dx}{x-1}$$

両辺に 1 を加えると，

$$\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 1 + \int_{2}^{2021} \frac{dx}{x-1}$$

$$\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 1 + \Big[\log|x-1|\Big]_{2}^{2021}$$

$$\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 1 + \log 2020 - \log 1$$

$$\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 1 + 7.61$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 8.61 \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④より，

$$8.01 + \frac{1}{2020} < \sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 8.61$$

が成り立つ．

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$ の整数部分は 8 である． ……(答)

第４問

問１

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{AP}=(p-\sqrt{3},\ q,\ r)$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$
$$-\sqrt{3}(p-\sqrt{3})+3q=0$$
$$\therefore\ p=\sqrt{3}q+\sqrt{3}\quad\cdots\cdots①\quad\cdots\cdots(答)$$

さらに，$\overrightarrow{CP}=(p+\sqrt{3},\ q,\ r)$ より

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=4$$
$$(p-\sqrt{3})(p+\sqrt{3})+q^2+r^2=4$$
$$\therefore\ p^2+q^2+r^2=7\quad\cdots\cdots②$$

① を ② に代入すると

$$3(q+1)^2+q^2+r^2=7$$
$$r^2=-4q^2-6q+4$$

$r>0$ より

$$r=\sqrt{-4q^2-6q+4}\quad\cdots\cdots③\quad\cdots\cdots(答)$$

q が満たすべき条件は，①，③ を満たす実数 p，r $(r>0)$ が存在することであるから

$$-4q^2-6q+4>0$$
$$2q^2+3q-2<0$$
$$(2q-1)(q+2)<0$$
$$\therefore\ -2<q<\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots④\quad\cdots\cdots(答)$$

問２

M は BP の中点なので　$M\left(\frac{p}{2},\ \frac{q+3}{2},\ \frac{r}{2}\right)$

△ABC の重心は $(0,\ 1,\ 0)$ であるから，ℓ 上の点 N の座標は $(0,\ 1,\ s)$ とおけて

$$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{p}{2},\ -\frac{q+1}{2},\ s-\frac{r}{2}\right)$$

また，$\overrightarrow{BP}=(p,\ q-3,\ r)$ であるから，$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{MN}$ より

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{MN}=0$$
$$-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}(q-3)(q+1)+r\left(s-\frac{r}{2}\right)=0$$
$$p^2+q^2-2q-3-2rs+r^2=0$$
$$4-2q-2rs=0\quad[\because\ ②]$$
$$\therefore\ s=\frac{2-q}{r}\quad[\because\ r\fallingdotseq 0]$$

よって ③ より，N の座標は $\left(0,\ 1,\ \dfrac{2-q}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}\right)$ $\cdots\cdots$(答)

問 3

問 2 より，N の z 座標は

$$\frac{2-q}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2-q)^2}{-4q^2-6q+4}} \quad [\because ④ より 2-q>0]$$

$$=\sqrt{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(q-2)^2}{2q^2+3q-2}}$$

$f(q)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(q-2)^2}{2q^2+3q-2}\ \left(-2<q<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$f'(q)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(q-2)(2q^2+3q-2)-(q-2)^2(4q+3)}{(2q^2+3q-2)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(q-2)(11q+2)}{(2q^2+3q-2)^2}$$

よって，$f(q)$ の増減表は次のようになる．

q	(-2)	$\cdots$	$-\frac{2}{11}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(q)$		$-$	0	$+$	
$f(q)$		↘	最小	↗	

ゆえに，N の z 座標 $\sqrt{f(q)}$ が最小になるときの q の値は

$$q=-\frac{2}{11} \quad \cdots\cdots(答)$$

部分別解

$2-q=t$ とおくと，④ より $\dfrac{3}{2}<t<4$ であり

$$f(q)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2(2-t)^2+3(2-t)-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2t^2-11t+12}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-\frac{11}{t}+\frac{12}{t^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12\left(\frac{1}{t}-\frac{11}{24}\right)^2-\frac{25}{48}}$$

$\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{t}<\dfrac{2}{3}$ であるから，$f(q)\ (>0)$ は $\dfrac{1}{t}=\dfrac{11}{24}$ のとき最小になる．

このとき，$t=\dfrac{24}{11}$ つまり $q=-\dfrac{2}{11}$ $\cdots\cdots$(答)