2020年度 大阪市立大学 前期 数学 文系

第１問

問１

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx \qquad \cdots\cdots ①$$

与えられた関数 ① を微分すると　　$f'(x) = 3(x^2 + 2ax + b)$

関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件は，方程式 $f'(x) = 0$ が異なる２つの実数解をもつことである．

方程式 $x^2 + 2ax + b = 0$ について，判別式を D とすると，$D/4 = a^2 - b > 0$

よって，求める a, b の条件は，$a^2 - b > 0$　　$\cdots$(答)　　$\cdots\cdots$②

問２

問１の条件が成り立つとき，方程式 $f'(x) = 0$ の異なる２つの実数解を $x = \alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ とすると，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗

ゆえに，極大値 $f(\alpha)$ と極小値 $f(\beta)$ の絶対値が等しくなるとき，$|f(\alpha)| = |f(\beta)|$ であるが，増減表により $f(\alpha) > f(\beta)$ であるから，$f(\alpha) = -f(\beta)$，すなわち，$f(\alpha) + f(\beta) = 0$　　$\cdots\cdots$③

である．① を用いて，

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + \beta^3 + 3a\beta^2 + 3b\beta \\ &= \alpha^3 + \beta^3 + 3a(\alpha^2 + \beta^2) + 3b(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3a\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 3b(\alpha + \beta) \qquad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

ここで方程式 $f'(x) = 0$ について，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = b \qquad \cdots\cdots ⑤$$

であるから，⑤ を ④ に代入して，③ は，

$$\begin{aligned} ③ &\iff (-2a)^3 - 3b \cdot (-2a) + 3a\{(-2a)^2 - 2b\} + 3b \cdot (-2a) = 0 \\ &\iff 2a(2a^2 - 3b) = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ または } b = \frac{2}{3}a^2 \end{aligned}$$

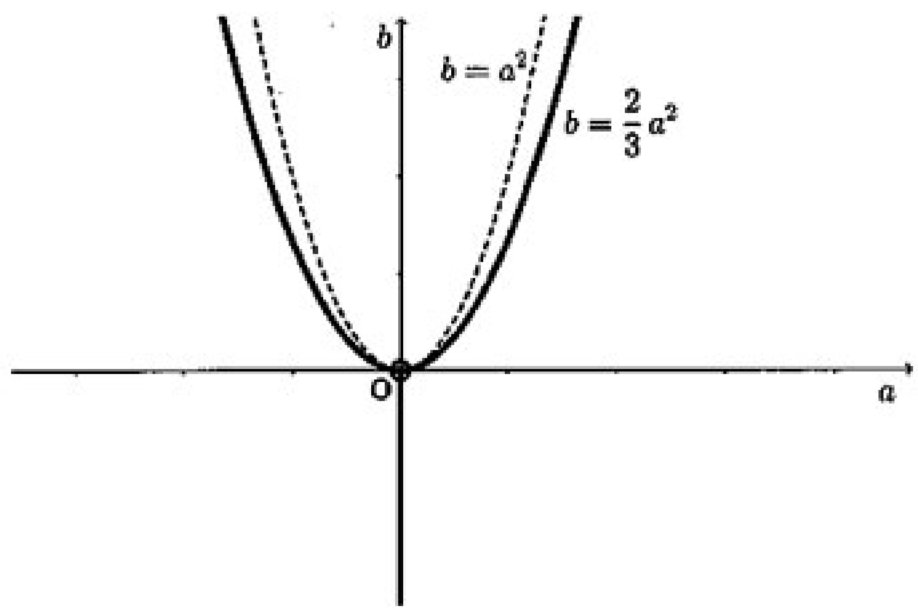
② により，求める a, b の条件は，

「$a = 0$ かつ $b < 0$」または「$b = \dfrac{2}{3}a^2$ ただし，$(a, b) \neq (0, 0)$」　　$\cdots$(答)　　$\cdots\cdots$⑥

問３

問１と問２の条件を同時に満たす実数の組 (a, b) は ⑥ のことである．

よって，図の実線部分 (原点の白丸を除く) である．



第2問

問1

$f(x)=x^3-3x^2+px+q$ とし，$\alpha=r+si$（r，s は実数，$s\neq 0$）とする．

$f(\alpha)=0$ より，

$$(r+si)^3-3(r+si)^2+p(r+si)+q=0$$

が成り立ち，

$$(r^3+3r^2si-3rs^2-s^3i)-3(r^2+2rsi-s^2)+p(r+si)+q=0$$
$$(r^3-3rs^2-3r^2+3s^2+pr+q)+(3r^2s-s^3-6rs+ps)i=0$$

p，q，r，s は実数であるから，

$$\begin{cases} r^3-3rs^2-3r^2+3s^2+pr+q=0 & \text{（この左辺を } A \text{ とする）} \\ 3r^2s-s^3-6rs+ps=0 & \text{（この左辺を } B \text{ とする）} \end{cases}$$

このとき，

$$\begin{aligned} f(\overline{\alpha}) &= (r-si)^3-3(r-si)^2+p(r-si)+q \\ &= A-Bi=0 \end{aligned}$$

ここで，$s\neq 0$ より，$\alpha\neq\overline{\alpha}$ である．

したがって，

α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう1つの虚数解である　（証明終わり）

問2

$\alpha=r+\sqrt{3}i$ より，$\overline{\alpha}=r-\sqrt{3}i$ である．

これと $(\alpha-b)(\overline{\alpha}-b)=12$ より，

$$(r-b+\sqrt{3}i)(r-b-\sqrt{3}i)=12$$
$$(r-b)^2+3=12 \quad \therefore \quad (r-b)^2=9$$

したがって，求める値は

$$r-b=\pm 3$$ ……（答）

問3

問2の仮定の下で，$f(x)=0$ の解は問1の主張より，

$$x=b,\ r\pm\sqrt{3}i \quad (b,\ r \text{ は実数})$$

と表せ，

$$x^3-3x^2+px+q=(x-b)\{x-(r+\sqrt{3}i)\}\{x-(r-\sqrt{3}i)\} \quad \text{（恒等式）}$$

が成り立つ．このとき，

$$(\text{右辺}) = (x-b)(x^2-2rx+r^2+3) = x^3-(2r+b)x^2+(2rb+r^2+3)x-b(r^2+3)$$

であるから，係数を比較して，

$$\begin{cases} 3 = 2r+b & \cdots\cdots ① \\ p = 2rb+r^2+3 & \cdots\cdots ② \\ q = -b(r^2+3) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

問 2 の結果と①より，$r=0,2 \quad \therefore \quad (r,b)=(0,3),(2,-1)$

これを②，③に代入すると，$(p,q)=(3,-9),(3,7)$

したがって，求める組は

$$(p,q)=(3,-9),(3,7) \qquad \cdots\cdots（答）$$

第3問

問1

$a_n = a_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n!}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ ……①より

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．$n \geqq 1$ のとき，①＋②より

$$a_{n+1} - a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \cdots\cdots ③$$

であるから，③で $n = 2m-1,\ 2m$ とおいて

$$\begin{aligned} a_{2m} - a_{2m-2} &= \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^{2m}}{(2m)!} \\ &= \frac{-1}{(2m-1)!} + \frac{1}{(2m)!} \\ &= \frac{1-2m}{(2m)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2m+1} - a_{2m-1} &= \frac{(-1)^{2m}}{(2m)!} + \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \frac{1}{(2m)!} + \frac{-1}{(2m+1)!} \\ &= \frac{2m}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

となる．m が自然数であることより $\dfrac{1-2m}{(2m)!} < 0,\ \dfrac{2m}{(2m+1)!} > 0$ なので

$$a_{2m} - a_{2m-2} < 0,\quad a_{2m+1} - a_{2m-1} > 0$$

つまり

$$a_{2m-2} > a_{2m},\quad a_{2m-1} < a_{2m+1}$$

が成り立つ．(証明終わり)

問2

$a_0 = 1,\ a_1 = a_0 + \dfrac{(-1)^1}{1!} = 0$ であるから，問1より，すべての自然数 m に対して

$$(1=)\,a_0 > a_2 > a_4 > \cdots > \cdots > a_{2m} > \cdots,\quad (0=)\,a_1 < a_3 < a_5 < \cdots < a_{2m+1} < \cdots \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．さらに，①で $n = 2m+1$ とおいて

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= a_{2m} + \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= a_{2m} - \frac{1}{(2m+1)!} \\ &< a_{2m} \end{aligned}$$

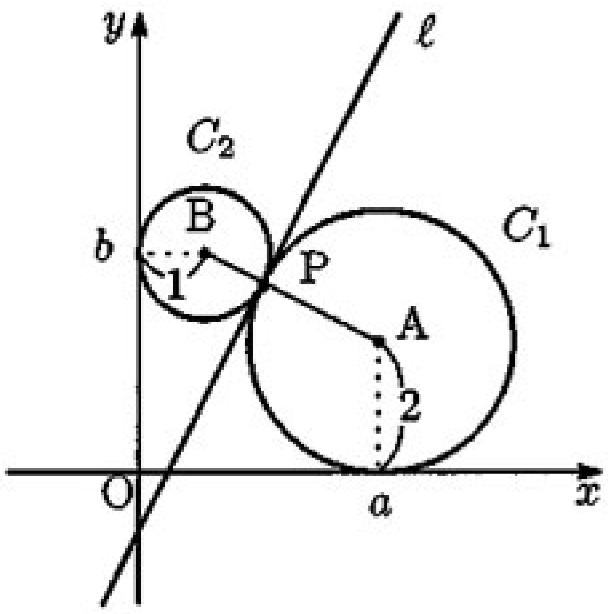
であるから，④より，すべての自然数 m に対し

$$0 < a_3 < a_5 < \cdots < a_{2m+1} < \cdots < a_{2m} < \cdots < a_4 < a_2 < 1$$

が成り立つ．したがって，$n \geqq 2$ のとき，$0 < a_n < 1$ が成り立つ．

第4問

問1



条件から円 C_1, C_2 および直線 ℓ の位置関係は右の図のようになり, $\mathrm{A}(a, 2)$, $\mathrm{B}(1, b)$ である.

C_1 と C_2 は点 P で外接するから　$\mathrm{AB}=3$

よって　$\sqrt{(a-1)^2+(2-b)^2}=3$

したがって　$(a-1)^2+(2-b)^2=9$　$\cdots\cdots$ ①

また, 直線 ℓ と直線 AB は垂直であり, 直線 ℓ の傾きは 2, 直線 AB の傾きは $\dfrac{2-b}{a-1}$ であるから

$$2\cdot\frac{2-b}{a-1}=-1 \qquad \text{ゆえに} \qquad a=2b-3 \quad \cdots\cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$(2b-4)^2+(2-b)^2=9$$
$$(b-2)^2=\frac{9}{5}$$

$b \geqq 2$ より　$b-2=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$　　よって　$b=2+\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

これを ② に代入すると　$a=2\left(2+\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)-3=1+\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

したがって　$a=1+\dfrac{6}{\sqrt{5}},\ b=2+\dfrac{3}{\sqrt{5}}$　$\cdots\cdots$ (答)

問2

直線 ℓ は傾きが 2 で点 P を通る直線である. 問1の結果より

$$\mathrm{A}\left(1+\frac{6}{\sqrt{5}},\ 2\right),\ \mathrm{B}\left(1,\ 2+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

点 P は, 線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\mathrm{P}\left(\frac{1\cdot\left(1+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)+2\cdot 1}{2+1},\ \frac{1\cdot 2+2\cdot\left(2+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)}{2+1}\right) \qquad \text{よって} \quad \mathrm{P}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}},\ 2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

したがって, ℓ の方程式は　$y-\left(2+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=2\left\{x-\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

ゆえに　$y=2x-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　$\cdots\cdots$ (答)

問3

$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(1+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\left(2+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-2\cdot 1\right|=\frac{3\sqrt{5}}{2}+\frac{9}{5} \quad \cdots\cdots (答)$$