$\boxed{1}$ $\quad f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}\ (x\geqq 0)$

（1） $x\geqq 0$ においては $f(x)>0$ であるから，与式の自然対数をとって

$$\log f(x)=\frac{1}{x+1}\log(x+1)$$

この両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\log(x+1)+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\cdot f(x)$$

よって，$f(x)$ の増減は右の表のようになる．

x	0		$e-1$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘

これより $f(x)$ の最大値は

$f(e-1)=\boldsymbol{e^{\frac{1}{e}}}$……(答)

（2） 与えられた注意から

$$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\mathbf{1}\text{……(答)}$$

また，（1）の途中経過から

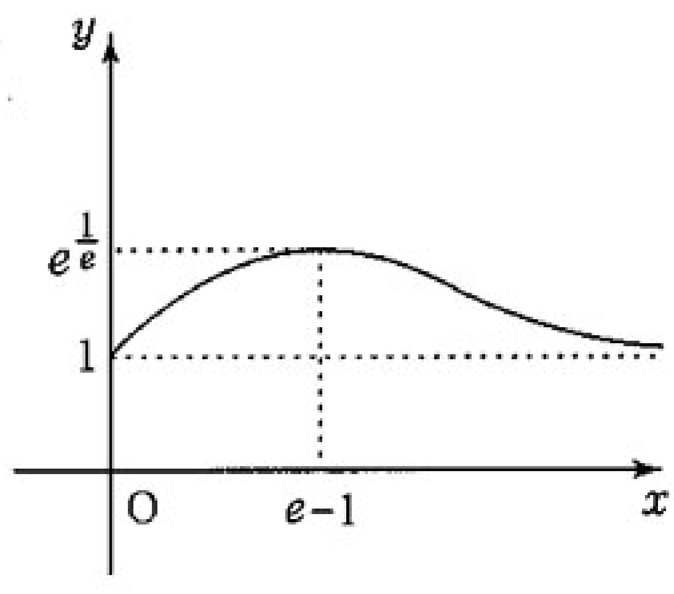
$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\cdot f(x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{\log(x+1)}{x+1}\right)\cdot f(x)$$

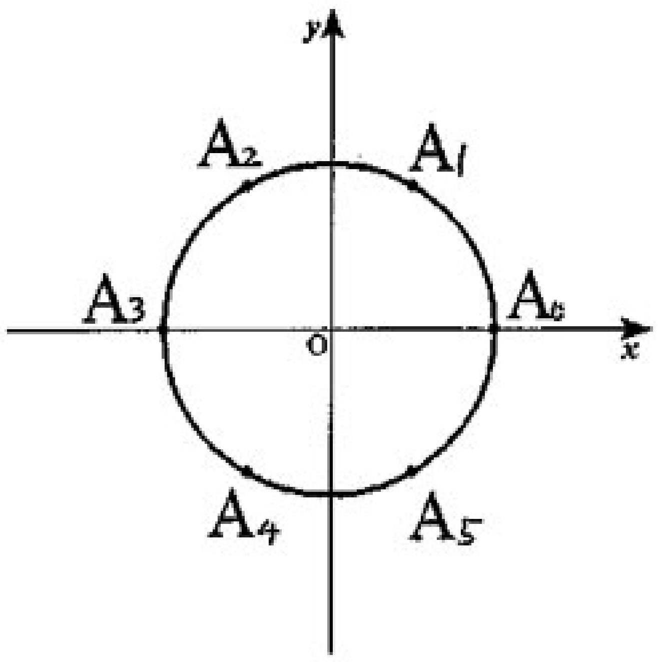
$$=\mathbf{0}\text{……(答)}$$

（3） （1）の増減表および（2）の極限から，

$y=f(x)$ のグラフの概形は右のようになる．



$\boxed{2}$



複素数平面上で $\cos\dfrac{\pi k}{3}+i\sin\dfrac{\pi k}{3}$ の表す点を A_k とすると $(k=0,1,\cdots,5)$，Z_n が表す点は点 $\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_5$ のいずれかと一致し，Z_n が表す点を確率 $\dfrac{1}{6}$ で反時計回りに１つ隣りの点に移動し，確率 $\dfrac{1}{6}$ で時計回りに１つ隣りの点に移動し，確率 $\dfrac{2}{3}$ でそのままにとどまったものが Z_{n+1} の表す点となる。

(1) Z_2 が実数となるのは，

(i) $\mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_0$ となる

(ii) $\mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_0$ となる

(iii) $\mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_5 \to \mathrm{A}_0$ となる

のいずれかのときである。

(i) の確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

(ii) の確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{36}$

(iii) の確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{36}$

よって Z_2 が実数とならない確率は

$1-\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}\right)=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots$(答)

(2) $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n$ がいずれも実数でないのは，

(i) Z_1 が A_1 と一致し，$Z_2, Z_3, \cdots, Z_n$ がいずれも A_1 または A_2 と一致するとき

(ii) Z_1 が A_5 と一致し，$Z_2, Z_3, \cdots, Z_n$ がいずれも A_4 または A_5 と一致するとき

$\mathrm{A}_1 \to$「A_1 または A_2」となる確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$

同様に $\mathrm{A}_2 \to$「A_1 または A_2」となる確率も $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$ であるから，

(i) の確率は $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$，　同様に (ii) の確率も $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ である.

よって，求める確率は $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ ……(答)

(3) Z_{n+1} が実数となるのは，

(i) 点 Z_n が A_0 または A_3 にあり，確率 $\dfrac{2}{3}$ でそのままとどまるとき

(ii) 点 Z_n が A_1 または A_2 または A_4 または A_5 にあり，確率 $\dfrac{1}{6}$ で A_0 または A_3 に移るとき

よって，$p_{n+1}=p_n\times\dfrac{2}{3}+(1-p_n)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{6}$

したがって，$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$ より，

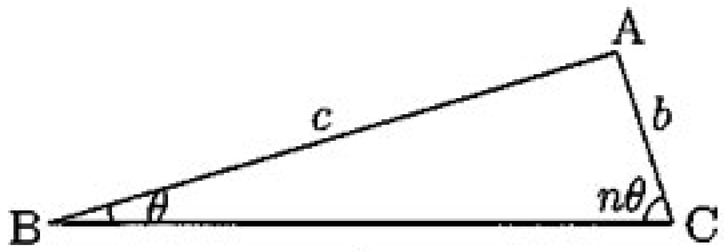
$p_n-\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)$

$p_1=\dfrac{2}{3}$ より，$p_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$ であるから，$p_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって，$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……(答)

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\dfrac{1}{3}$ ……(答)

$\boxed{3}$



$\angle\mathrm{ABC} = \theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ACB} = n\theta$ と表せる．$\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}\right)$

正弦定理より

$$\frac{c}{\sin n\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \qquad \therefore\ \frac{c}{b} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$b > 0,\ \sin\theta > 0$ であるから

$$c < nb \iff \frac{c}{b} < n \iff \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} < n \iff n\sin\theta - \sin n\theta > 0$$

である．したがって，n を 2 以上の自然数として，$n\sin\theta - \sin n\theta > 0$ が成り立つことを示せばよい．

$f(\theta) = n\sin\theta - \sin n\theta \ \left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{n+1}\right)$ とすると

$$f'(\theta) = n\cos\theta - n\cos n\theta = n(\cos\theta - \cos n\theta)$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}$ において，$0 < \theta < n\theta < \pi$ より，$\cos\theta > \cos n\theta$ であるから

$$f'(\theta) > 0$$

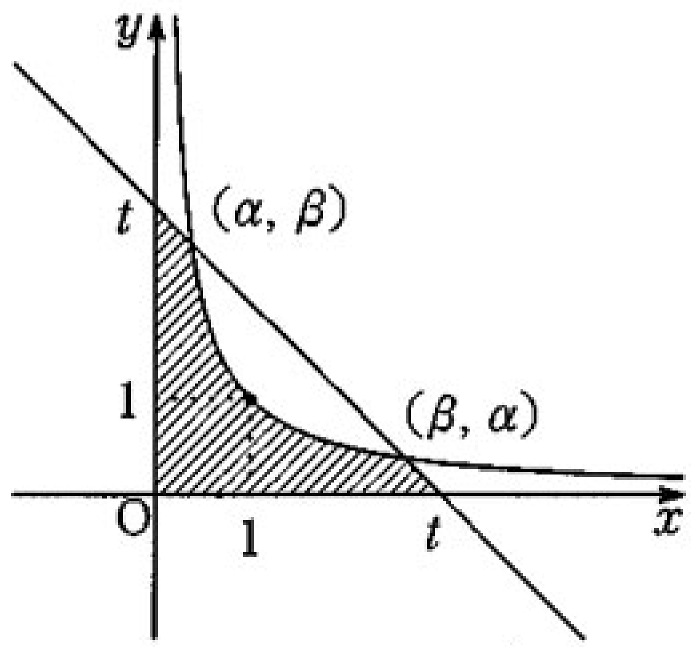
よって，$f(\theta)$ は増加関数であるから

$$f(\theta) > f(0) = 0$$

以上より，$c < nb$ が成り立つ．(証明終わり)

$\boxed{4}$

$t>2$ のときを考える．題意の領域は右図の斜線部である．曲線 $xy=1$, $x+y=t$ の2交点を (α,β), (β,α)（ただし，$\alpha<\beta$ とする）とおく．α, β は X の2次方程式 $X^2-tX+1=0$ の2解だから



$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2},\ \beta=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$$

$$\beta-\alpha=\sqrt{t^2-4},\ \alpha+\beta=t,\ \alpha\beta=1$$

である．これより

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}t^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot(\beta-\alpha)-\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx\right)\\&=\frac{1}{2}t^2-\frac{t}{2}\sqrt{t^2-4}+\log\frac{\beta}{\alpha}\\&=\frac{t}{2}\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)+\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\frac{2t}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)\end{aligned}$$

したがって

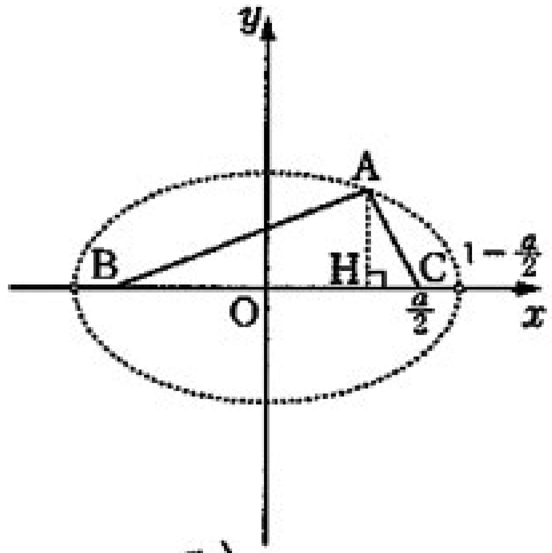
$$\lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t}\right)\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+2\log\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}{2}\right)\right)$$

$$=1+2\log 1=1\ \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{5}$



(1) $B\left(-\frac{a}{2},0\right)$, $C\left(\frac{a}{2},0\right)$ となるように座標軸をとる．b の値を変化させると

$$AB+AC=2-a$$

を満たしながら点 A は動くので $0<a<1$ であり，点 A の描く軌跡は B, C を焦点とし，長軸の長さが $2-a$ であるような楕円から x 軸上の 2 点を除いた部分である．

A から BC へ下ろした垂線の足を $H(x,0)$ $\left(-1+\frac{a}{2}<x<1-\frac{a}{2}\right)$ とする．

(i) $-1+\frac{a}{2}<x\leqq-\frac{a}{2}$ のとき

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi AH^2\cdot\left(\frac{a}{2}-x\right)-\frac{1}{3}\cdot\pi AH^2\cdot\left(-\frac{a}{2}-x\right)=\frac{\pi a}{3}AH^2$$

(ii) $-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}$ のとき

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi AH^2\cdot\left(\frac{a}{2}-x\right)+\frac{1}{3}\cdot\pi AH^2\cdot\left(x+\frac{a}{2}\right)=\frac{\pi a}{3}AH^2$$

(iii) $\frac{a}{2}\leqq x<1-\frac{a}{2}$ のとき

$$V=-\frac{1}{3}\cdot\pi AH^2\cdot\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\pi AH^2\cdot\left(x+\frac{a}{2}\right)=\frac{\pi a}{3}AH^2$$

(i), (ii), (iii) よりいずれのときも

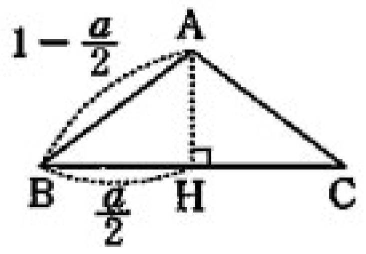
$$V=\frac{\pi a}{3}AH^2$$

よって V が最大となるのは AH が最大となるときであり，それは図より点 A が BC の垂直二等分線上にくるとき，つまり三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．

(証明終わり)

(2) 三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるとき $a+2b=2$ より

$$b=1-\frac{a}{2}$$



このとき

$$AH=\sqrt{\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-a}$$

であるから (1) と合わせて

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi a}{3}AH^2\\&\leqq\frac{\pi a}{3}\left(\sqrt{1-a}\right)^2 && \left(\text{等号成立は } b=1-\frac{a}{2} \text{ のとき}\right)\\&=-\frac{\pi}{3}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\pi}{12}\\&\leqq\frac{\pi}{12} && \left(\text{等号成立は } a=\frac{1}{2} \text{ のとき}\right)\end{aligned}$$

以上より V は

$$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=1-\frac{a}{2}\end{cases}\quad \text{つまり } (a,b)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \text{ のとき最大値 } \frac{\pi}{12}\qquad\cdots(\text{答})$$

をとる．