2020年度 大阪大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$

(1) $t=\sin a$ とおくと，$f(x)=2x^3-(6+3t)x^2+12tx+t^3+6t+5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-2(6+3t)x+12t \\ &= 6\{x^2-(2+t)x+2t\} \\ &= 6(x-t)(x-2) \end{aligned}$$

$0 \leqq a < 2\pi$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$ に注意して増減表をかくと，

x	$\cdots$	t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=\sin a$ でただ1つの極大値をもつ．(証明終わり)

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^3-(6+3t)t^2+12t^2+t^3+6t+5 \\ &= 6t^2+6t+5 \end{aligned}$$

$\therefore M(a)=6\sin^2 a+6\sin a+5$ ……(答)

(2) $M(a)=6\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}$ であるから，

$t=1$，つまり $a=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 17

$t=-\dfrac{1}{2}$，つまり $a=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき，最小値 $\dfrac{7}{2}$ ……(答)

$\boxed{2}$

（1）さいころを２回投げたあとにＱがＡに位置するのは，

1回目に出た目が１で，２回目に出た目が２である

または

1回目に出た目が２で，２回目に出た目が１である

または

1回目，２回目とも出た目が３，４，５，６のいずれかである

のときであるから，

$$p_2 = \frac{1+1+4\cdot 4}{6^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \cdots \text{（答）}$$

（2）さいころを$n+1$回投げたあとにＱがＡに位置するのは，n回投げたあとにＱが

Ａに位置していて，$n+1$回目に出た目が３，４，５，６のいずれかである

または

Ｂに位置していて，$n+1$回目に出た目が２である

または

Ｃに位置していて，$n+1$回目に出た目が１である

のときである．n回投げたあとにＱがＢまたはＣに位置する確率は$1-p_n$であり，まとめて考えて，

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{4}{6} + (1-p_n)\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6} \quad \cdots \text{（答）}$$

（3）（2）より，

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

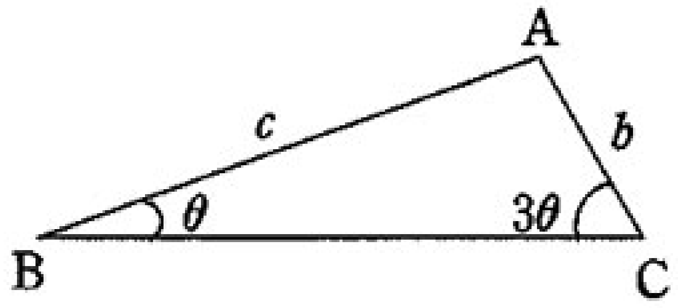
$p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ より $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ であるから，

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \quad \cdots \text{（答）}$$

$\boxed{3}$

$\angle ABC=\theta$ とすると，$\angle ACB=3\theta$ である．



三角形の内角の和に注目して

$$0<\theta+3\theta<\pi$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{4}$$

このもとで，正弦定理より

$$\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin 3\theta}$$

$$c=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\cdot b$$

よって　$3b-c=3b-\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\cdot b$

$$=\left(3-\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)b$$

$$=\left(\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)b$$

$$=\left\{\frac{3\sin\theta-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)}{\sin\theta}\right\}b$$

$$=\frac{4\sin^3\theta}{\sin\theta}\cdot b$$

$$=4b\sin^2\theta>0$$

以上より　$c<3b$　（証明終わり）