1

コインを N 回投げる試行によって $y=f(x)$ のグラフは次のように定まる.

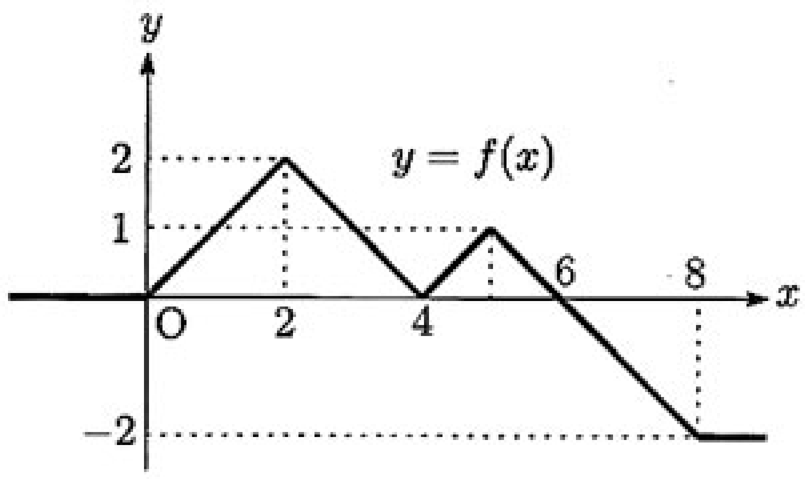
・定義1, 4により $x \leqq 0$ において $y=0$, $x \geqq N$ において $y=f(N)$.

・定義2により整数 n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N)$ に対応する $f(n)$ はすべて整数であり, かつ x の値が1異なると y の値も1だけ異なる.

・定義3により, 整数 n $(n=1,\ 2,\ 3, \ldots,\ N)$ に対し $n-1 \leqq x \leqq n$ においては2点 $(n-1, f(n-1))$ と $(n, f(n))$ を結ぶ線分である.

つまり, $0 \leqq x \leqq N$ における $y=f(x)$ のグラフは「原点を出発して各回のコイン投げによって表が出たら $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1)$ だけ進み, 裏が出たら $\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1)$ だけ進む経路をつないだ折れ線」である.
また, 逆に $y=f(x)$ のグラフが定まれば, N 回のコインの表裏の出方は1通りに定まる.

(1)　上記により, 次のグラフを得る.



(2)　$f(x)$ が極値をとり得るのは $x=j$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1)$ においてのみであり, 極大点と極小点は交互に現れることに注意する.

$f(x)$ が極値をとる点の個数が k $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ N-1)$ となるとき, 極値をとる x 座標の選び方が ${}_{N-1}\mathrm{C}_k$ 通りあり, そのうち最小の x において $f(x)$ が極大, 極小のいずれとなるかを定めれば $y=f(x)$ のグラフが1つに定まる.

各回のコイン投げにおいて「表」「裏」の出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ であるから,

$$P(k)=2\times{}_{N-1}\mathrm{C}_k\times\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{{}_{N-1}\mathrm{C}_k}{2^{N-1}}\quad(0 \leqq k \leqq N-1)$$

である.

また, $k \geqq N$ のときは

$$P(k)=0$$

である.

(3)　$f(x)$ が極大となる点の個数が k となる場合を次の4つに分類する.

(i) 1回目に表が出て N 回目に裏が出る場合，

極大，極小となる回数がそれぞれ k, $k-1$ であるから，極値をとる回数は合計 $(2k-1)$ 回である．よって，N 回のコインの表裏の出方は ${}_{N-1}\mathrm{C}_{2k-1}$ 通りである．

(ii) 1回目に表が出て N 回目にも表が出る場合．

極大，極小となる回数はともに k 回ずつであるから，(i) と同様にコインの表裏の出方は ${}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}$ 通りである．

(iii) 1回目に裏が出て N 回目にも裏が出る場合．

(ii) と同様にコインの表裏の出方は ${}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}$ 通りである．

(iv) 1回目に裏が出て N 回目に表が出る場合．

極大，極小となる回数はそれぞれ k, $k+1$ であるから，(i) と同様にコインの表裏の出方は ${}_{N-1}\mathrm{C}_{2k+1}$ 通りである．

これらの場合の数をすべて加えたものが，$f(x)$ が極大値をとる回数が k となるコインの出方の総数である．

ただし，上記において $0 \leqq k \leqq \left[\dfrac{N}{2}\right]$ である．このとき $k=0$, $k=\left[\dfrac{N}{2}\right]$ に対しては (i)〜(iv) の中に起こりえないものもあるが，二項係数 ${}_{m}\mathrm{C}_{\ell}$ において $\ell<0$ または $\ell>m$ の場合は，その値を 0 と定めれば，これらの場合も含めて上の結果は正しい．ここで実数 x に対して $[x]$ とは「x を超えない最大の整数」を表すものとする．

一般に整数 n, k に対し

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{k} + {}_{n}\mathrm{C}_{k+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} $$

が成立することを用いれば，

$$ \begin{aligned} &({}_{N-1}\mathrm{C}_{2k-1} + {}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}) + ({}_{N-1}\mathrm{C}_{2k} + {}_{N-1}\mathrm{C}_{2k+1}) \\ &= {}_{N}\mathrm{C}_{2k} + {}_{N}\mathrm{C}_{2k+1} \\ &= {}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1} \end{aligned} $$

であるから，

$$ Q(k) = \begin{cases} \dfrac{{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}}{2^N} & \left(0 \leqq k \leqq \left[\dfrac{N}{2}\right] \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(k > \left[\dfrac{N}{2}\right] \text{ のとき}\right) \end{cases} $$

(4) 2つの多項式

$$ (1+x)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} {}_{N+1}\mathrm{C}_{k} x^k $$

$$ (1-x)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} {}_{N+1}\mathrm{C}_{k} x^k (-1)^k $$

に対し，これらの差をとると，

$$(1+x)^{N+1}-(1-x)^{N+1}=2\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1} \qquad \cdots ①$$

①において $x=1$ とすることにより，

$$\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}=2^N \qquad \cdots ②$$

を得る．

また，①の両辺を x で微分すると，

$$(N+1)\{(1+x)^N+(1-x)^N\}=2\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}(2k+1)_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k}$$

となる．ここでさらに $x=1$ とすることにより，

$$\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}(2k+1)_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}=(N+1)2^{N-1} \qquad \cdots ③$$

を得る．

$\frac{1}{2}$(③ − ②) より，

$$\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}k_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}=\frac{1}{2}\{(N+1)2^{N-1}-2^N\}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}kQ(k)&=\frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}k_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}\\&=\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{2}\left\{(N+1)2^{N-1}-2^N\right\}\\&=\frac{N-1}{4}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1)　$z=x+yi$（x，yは実数）とおくと，$z+\overline{z}=2x$，$z-\overline{z}=2yi$であるから，C_0は，

$$(m+i)z+(m-i)\overline{z}+2a=0$$
$$\therefore\quad m(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})+2a=0$$
$$\therefore\quad 2mx-2y+2a=0$$
$$\therefore\quad y=mx+a \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす点zの集合となる．

同様に，C_1，C_2は，

$$y=k_1x-ak_1^{\,2}\cdots\cdots②,\quad y=k_2x-ak_2^{\,2}\cdots\cdots③$$

を満たす点zの集合となる．

よって，C_0，C_1，C_2はいずれも直線である．

(2)　P_1を表す複素数を$z=x+yi$（x，yは実数）とおくと，①－②より，

$$0=(m-k_1)x+a(k_1^{\,2}+1)$$
$$\therefore\quad \sqrt{m^2+1}\,x=a\{(m+\sqrt{m^2+1})^2+1\}$$
$$\therefore\quad \sqrt{m^2+1}\,x=2a(m\sqrt{m^2+1}+m^2+1)$$
$$\therefore\quad x=2a(m+\sqrt{m^2+1}) \qquad \cdots\cdots④$$

であり，yは，④に対して，①から定まる．

よって，F_1は「①，④をともに満たす実数mが存在する」……(*) ような点$z=x+yi$の集合である．

いま，

$$④\iff (x-2am)^2=(2a\sqrt{m^2+1})^2 \text{ かつ } x-2am\geqq 0$$
$$\iff 4axm=x^2-4a^2 \text{ かつ } x-2am\geqq 0$$

より，$x=0$のときは④を満たす実数mが存在しないから，(*)が成り立つためには，

$$x\neq 0$$

が必要であり，このとき，

$$④\iff m=\frac{x^2-4a^2}{4ax} \text{ かつ } x-2a\cdot\frac{x^2-4a^2}{4ax}\geqq 0$$
$$\iff m=\frac{x}{4a}-\frac{a}{x} \text{ かつ } \frac{x^2+4a^2}{2x}\geqq 0$$
$$\iff m=\frac{x}{4a}-\frac{a}{x} \text{ かつ } x>0$$

以上より，

$$(*)\iff y=mx+a \text{ かつ } m=\frac{x}{4a}-\frac{a}{x} \text{ かつ } x>0 \text{ を満たす実数 } m \text{ が存在する}$$
$$\iff y=\left(\frac{x}{4a}-\frac{a}{x}\right)x+a \text{ かつ } x>0$$
$$\iff y=\frac{x^2}{4a} \text{ かつ } x>0$$

であるから，F_1は，$z=x+yi$（x，yは実数）とおくとき，放物線$y=\dfrac{x^2}{4a}$の$x>0$の部分である．

(3) $\quad \dfrac{x^2}{4a}-(k_1x-ak_1{}^2)=\dfrac{1}{4a}(x-2ak_1)^2$

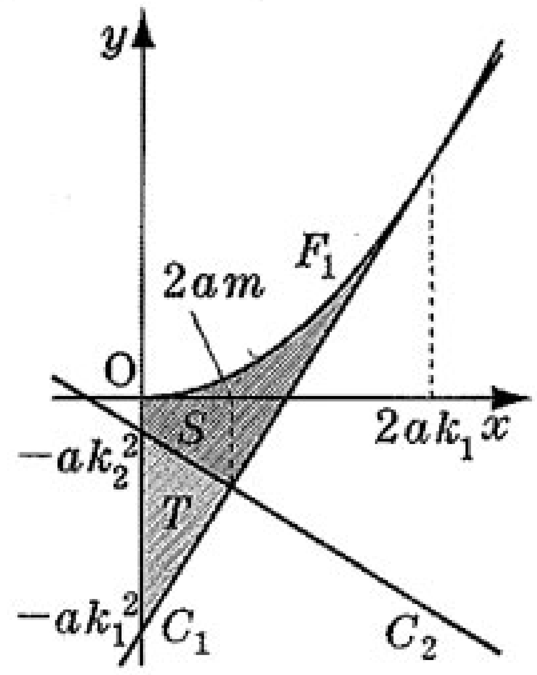
より，F_1 と C_1 は $x=2ak_1$ の点において接する（④より，その点はP_1である）．

また，$k_1=m+\sqrt{m^2+1}>0$，$k_2=m-\sqrt{m^2+1}<0$ であり，これらより，$k_1 \neq k_2$ であるから，②，③を x，y の連立方程式とみて解き，x を求めると，

$$x=a(k_1+k_2)=2am$$

となる．

よって，$m>0$ のとき，F_1，C_1，C_2 は右図のようになるから，



$$S+T=\int_0^{2ak_1}\left\{\frac{x^2}{4a}-(k_1x-ak_1{}^2)\right\}dx$$

$$=\int_0^{2ak_1}\frac{1}{4a}(x-2ak_1)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{12a}(x-2ak_1)^3\right]_0^{2ak_1}=\frac{2a^2k_1{}^3}{3}$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot a(k_1{}^2-k_2{}^2)\cdot 2am=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 4m\sqrt{m^2+1}\cdot 2am=4a^2m^2\sqrt{m^2+1}$$

であり，これらより，

$$\frac{S+T}{T}=\frac{k_1{}^3}{6m^2\sqrt{m^2+1}}=\frac{\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)^3}{6m^2\sqrt{m^2+1}}$$

$$\therefore\quad \frac{S}{T}=\frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)^3}{6\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}-1$$

したがって，$\dfrac{S}{T}$ は a によらず一定であるから，$\dfrac{T}{S}$ も a によらず一定であり，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S}{T}=\frac{2^3}{6}-1=\frac{1}{3}$$

より，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T}{S}=3$$

3

(1)　Oから平面PQRに下ろした垂線の足をHとすると，$OP=OQ=OR=\sqrt{t^2+1}$，OH：共通より，3つの直角三角形△OPH，△OQH，△ORHは合同であるから，Hは△PQRの外心であり，$PQ=QR=RP=\sqrt{t^2+(1-t)^2+1}$ より，△PQRが正三角形であることも考慮すると，Hは△PQRの重心である．

よって，$H\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)$ であるから，四面体OPQRの体積を V とすると，

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle PQR\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}PQ^2\sin\frac{\pi}{3}\cdot OH\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\{t^2+(1-t)^2+1\}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{t+1}{3}\\
&=\frac{1}{6}(t^2-t+1)(t+1)\\
&=\frac{1}{6}(t^3+1)
\end{aligned}
$$

であり，とくに，$t=1$ のときは，

$$\frac{1}{3}$$

となる．

(2)　題意の領域は，4つの四面体OPQR，OAPR，OBQP，OCRQを合わせた立体である．

よって，3つの四面体OAPR，OBQP，OCRQが合同であり，四面体OAPRの体積が

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle OAP\cdot(\text{Rの}z\text{座標})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot t=\frac{t}{6}$$

であることより，

$$V_1=V+3\cdot\frac{t}{6}=\frac{1}{6}(t^3+3t+1)$$

である．

(3)
$$V_2=\frac{4}{3}\pi OP^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3$$

であるから，$f(t)=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$ とおくと，

$$f(t)=\frac{1}{64\pi^2}\cdot\frac{(t^3+3t+1)^2}{(t^2+1)^3}$$

$$
\begin{aligned}
f'(t)&=\frac{1}{64\pi^2}\cdot\frac{2(t^3+3t+1)(3t^2+3)\cdot(t^2+1)^3-(t^3+3t+1)^2\cdot3(t^2+1)^2\,2t}{\{(t^2+1)^3\}^2}\\
&=\frac{1}{64\pi^2}\cdot\frac{6(t^3+3t+1)(-t^2-t+1)}{(t^2+1)^4}
\end{aligned}
$$

より，$f(t)$ の増減は右表のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，$\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{f(t)}$ が最大となる t の値は，

$$t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

である．