2020年度 東京大学 前期 数学 文系

文系第１問

$$f(x)=x^3-3ax^2+b$$

とおくと，

$$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$$

より，$f(x)$の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(0)=b>0$$

であるから，条件１より，求めるbは，$f(2a)=0$を満たすbであり，

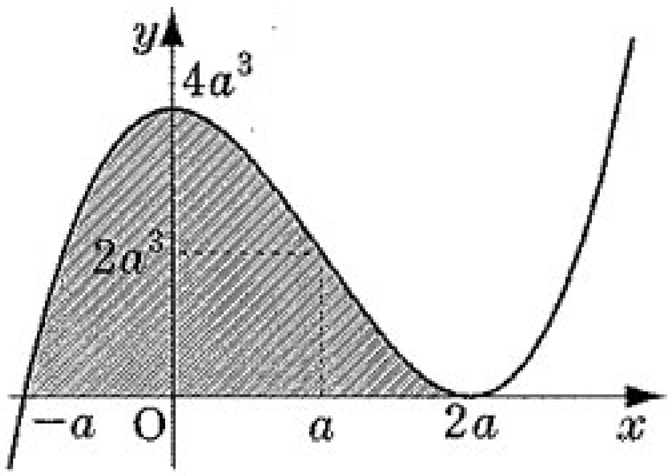
$$b=4a^3$$

である．

このとき，x軸とCで囲まれた部分（境界は含まない）は右図のようになるから，条件２を満たすためには，y軸の$0<y<4a^3$の部分に，x座標とy座標がともに整数である点（以下，格子点と呼ぶ）が存在し，かつ，２個以上は存在しないこと，すなわち，

$$1<4a^3\leqq 2 \qquad \cdots\cdots①$$

であることが必要である．



逆に，①のとき，$0<a<1$であり，

$$f(a)=2a^3\leqq 1$$

であるから，図より，条件２は満たされる．

よって，①より，求める範囲は，

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

である．

文 科 第 2 問

(1) 問題文の「条件」における2本の直線を l, m とする.

(ア) l, m が x 軸に垂直である場合

5点の選び方の総数を M_1 とおく. y 軸に垂直な4直線のうち, 選んだ点を2個含むものがちょうど1本存在する (それを n とする). M_1 は, l, m, n がそれぞれ直線 $x=1$, $x=2$, $y=1$ であるときの5点の選び方の総数の ${}_4\mathrm{C}_2 \cdot 4$ 倍である. l, m, n がそれぞれ直線 $x=1$, $x=2$, $y=1$ であるとき, 5点の選び方は

$$(3,\ 1),\ (4,\ 1),\ (a_1,\ 2),\ (a_2,\ 3),\ (a_3,\ 4)\quad (\,a_1,\ a_2,\ a_3\ は\ 3\ または\ 4)$$

であり, 2^3 通りである. よって $M_1 = {}_4\mathrm{C}_2 \cdot 4 \cdot 2^3 = 192$ である.

(イ) l, m が y 軸に垂直である場合

5点の選び方の総数を M_2 とおくと, (ア) と同様に $M_2 = 192$ である.

(ウ) l, m の一方が x 軸に垂直で他方が y 軸に垂直である場合

5点の選び方の総数を M_3 とおく. M_3 は, l, m がそれぞれ直線 $x=1$, $y=1$ であるときの5点の選び方の総数の 4^2 倍である. l, m がそれぞれ直線 $x=1$, $y=1$ であるとき, 5個の点の選び方の総数は,

9個の点 $(a,\ b)$ $(a=2,\ 3,\ 4,\ b=2,\ 3,\ 4)$ から5個を選ぶ場合の数

から

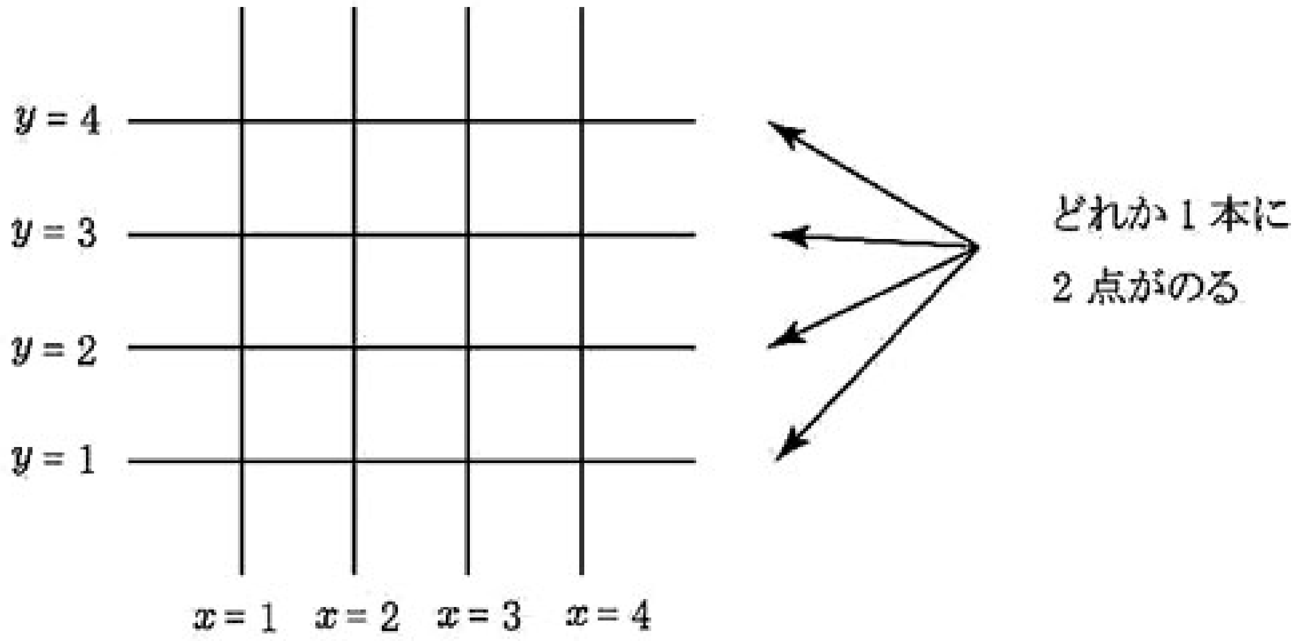
6直線 $x=2$, $x=3$, $x=4$, $y=2$, $y=3$, $y=4$ のうちの5本でできる6個の点から5個を選ぶ場合の数

を引いて ${}_9\mathrm{C}_5 - {}_6\mathrm{C}_5 \cdot {}_6\mathrm{C}_5 = 90$ 通りである.

よって $M_3 = 4^2 \cdot 90 = 1440$ である.

以上から, 求める場合の数は $M_1 + M_2 + M_3 = 1824$ 通りである.

(2)　5 点が問題文の「条件」を満たすとき, 4 直線 $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$ 上のいずれか 1 本に 2 点があり, 他の 3 本には 1 点ずつある. 2 点がある直線の選び方は 4 通りである.

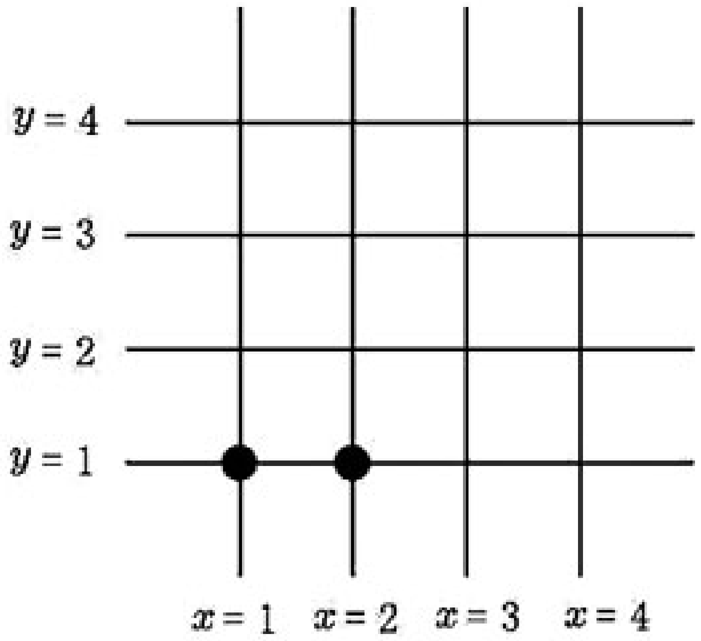


仮に, 2 点がある直線が $y=1$ であるとする. $y=1$ 上にある 2 点の選び方は,

$${}_4\mathrm{C}_2=6 \text{ (通り)}$$

である.

さらに, $y=1$ 上にある 2 点が $(1,1)$, $(2,1)$ であるとする. このとき, 残りの 3 点を $(a,2)$, $(b,3)$, $(c,4)$ とおく.



ここで,

- a, b, c がすべて 3 または 4 であり, 3, 4 がいずれも含まれる場合は,

$$2^3-2=6 \text{ (通り)}$$

- a, b, c が $\{1,3,4\}$ または $\{2,3,4\}$ である場合は,

$$2\times 3!=12 \text{ (通り)}$$

である. したがって, 残りの 3 点の選び方は,

$$6+12=18 \text{ (通り)}$$

である.

以上より, 求める場合の数は,

$$4\times 6\times 18=432 \text{ (通り)}$$

である.

文系第３問

(1)　$y=x^2-2x+4$ のとき $y'=2x-2$ であるから，点 $\mathrm{T}(t,\ t^2-2t+4)$ $(t \geqq 0)$ における C の接線 m の方程式は，

$$y=(2t-2)(x-t)+t^2-2t+4$$

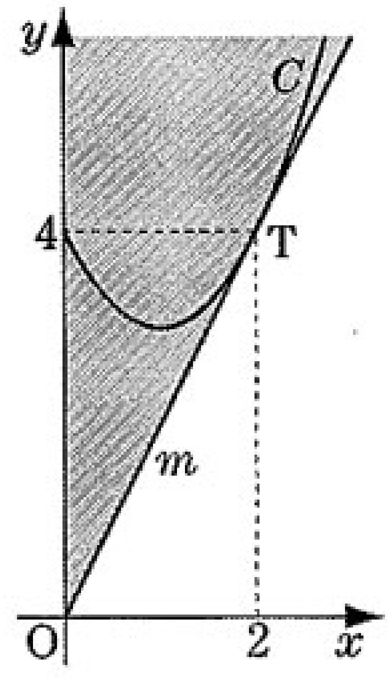
$$\therefore\quad y=(2t-2)x-t^2+4$$

$t \geqq 0$ に注意すると，m が O を通るとき，

$$-t^2+4=0 \qquad \therefore\quad t=2$$

であり，このとき，$\mathrm{T}(2,\ 4)$，$m：y=2x$ となる．

よって，求める領域は右図の網目部分（境界を含む）である．



(2)　α が与えられた条件を満たすのは，(1)の領域を O のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した領域と l が共有点をもつときである．

(1)で求めた T に対して，$\angle x\mathrm{OT}=\alpha$ とおくと，$\tan\alpha=2>\sqrt{3}$ より，$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であることから，求める範囲は，

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) \leqq a \leqq \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \text{ または } \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) \leqq a \leqq \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

であり，

$$\tan\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\frac{\pi}{3}}{1\mp\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{1\mp2\sqrt{3}}=\frac{-8\mp5\sqrt{3}}{11} \quad \text{（複号同順）}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{6}\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

より，

$$\frac{-8-5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ または } \frac{-8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる．

文系第4問

(1) $$\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2=\sum_{m=0}^{n-1}(2^m)^2+2a_{n,\,2}$$

より，

$$\begin{aligned}a_{n,\,2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2-\sum_{m=0}^{n-1}(2^m)^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2-\sum_{m=0}^{n-1}4^m\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2-\frac{4^n-1}{4-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}(2^n-1)\left(2^n-1-\frac{2^n+1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)\end{aligned}$$

(2) n 個の単項式 $2^m x$ （$m=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$）から，異なる k 個を選んでそれらの積をとり，k 個の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の単項式の和は $a_{n,\,k}x^k$ であるから，

$$f_n(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x)$$

である．

よって，

$$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$$

$$f_n(2x)=(1+2^1x)(1+2^2x)\cdot\cdots\cdot(1+2^nx)$$

であるから，

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)(1+2^nx) \qquad \cdots\cdots①$$

$$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)f_n(2x)=(1+x)f_n(2x) \qquad \cdots\cdots②$$

すなわち，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx,\quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$$

(3) ①，②，すなわち，

$$\begin{aligned}&1+a_{n+1,\,1}x+\cdots+a_{n+1,\,k}x^k+a_{n+1,\,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,\,n+1}x^{n+1}\\&=(1+a_{n,\,1}x+\cdots+a_{n,\,k}x^k+a_{n,\,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,\,n}x^n)(1+2^nx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&1+a_{n+1,\,1}x+\cdots+a_{n+1,\,k}x^k+a_{n+1,\,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,\,n+1}x^{n+1}\\&=(1+x)\{1+a_{n,\,1}(2x)+\cdots+a_{n,\,k}(2x)^k+a_{n,\,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots+a_{n,\,n}(2x)^n\}\end{aligned}$$

の両辺の x^{k+1} の係数を比較して，

$$a_{n+1,\,k+1}=a_{n,\,k+1}+2^na_{n,\,k} \qquad \cdots\cdots③$$

$$a_{n+1,\,k+1}=2^{k+1}a_{n,\,k+1}+2^ka_{n,\,k} \qquad \cdots\cdots④$$

③を用いて，④から，$a_{n,\,k+1}$ を消去すると，

$$a_{n+1,\,k+1}=2^{k+1}(a_{n+1,\,k+1}-2^na_{n,\,k})+2^ka_{n,\,k}$$

$$\therefore\quad \frac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$$