理系第１問

３つの不等式

$ax^2+bx+c>0$ ……①

$bx^2+cx+a>0$ ……②

$cx^2+ax+b>0$ ……③

をすべて満たす実数 x の集合が，$x>p$ を満たす実数 x の集合と一致している．……(*)

(1)　$a<0$ とすると，

$$\lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty$$

となり，[十分大きな実数 x は①を満たさないから] (*)に反する．

よって，$a\geqq 0$ であり，同様に，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$ である．

(2)　$a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$ と仮定すると，

$$\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(bx^2+cx+a)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(cx^2+ax+b)=\infty$$

となり，[十分絶対値の大きな負の実数 x は①，②，③をすべて満たすから] (*)に反する．

よって，(1)を考慮すると，a，b，c のうち少なくとも１個は０である．

(3)　$a=b=c=0$ とすると，①，②，③をすべて満たす実数 x の集合は，空集合となり，(*)に反するから，(1)を考慮すると，a，b，c のうち少なくとも１個は正である．……④

$a=0$ のとき，①，②，③は，それぞれ，

$bx+c>0$ ……⑤，$x(bx+c)>0$ ……⑥，$cx^2+b>0$ ……⑦

となる．

ここで，

⑤かつ⑥かつ⑦ $\Longleftrightarrow$ ⑤かつ $x>0$ かつ⑦

であるが，(1)，④より，$x>0$ のとき⑤，⑦は成り立つから，

⑤かつ⑥かつ⑦ $\Longleftrightarrow$ $x>0$

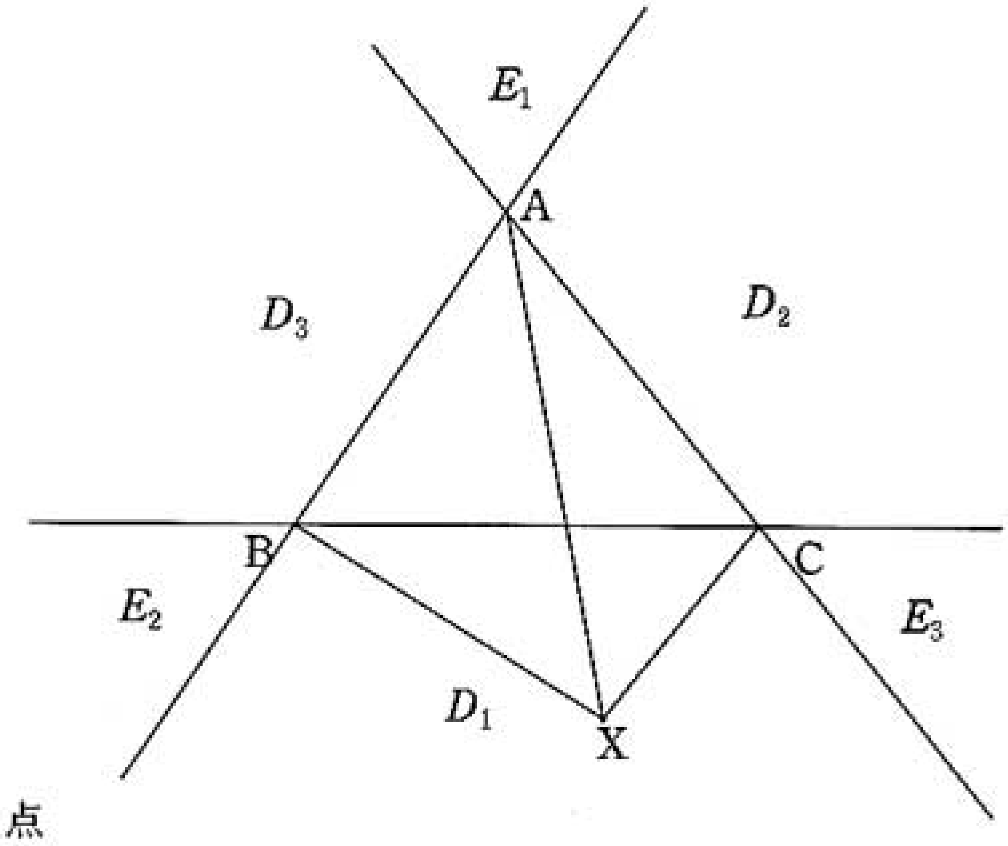
であり，①，②，③をすべて満たす実数 x の範囲は，$x>0$ である．

$b=0$ のとき，$c=0$ のときも同様であるから，$p=0$ である．

理科　第2問

点Xが$\triangle ABC$の内部にあるとき，$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=\triangle ABC=1$であるから，
$2\leqq \triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX\leqq 3$ ……①を満たすXは$\triangle ABC$の周上または外部にある．

右図のように，$\triangle ABC$の外部の領域をD_k，E_k（$k=1,2,3$）とする．ただし，各領域は境界線を含むものとする．



（i）点Xが領域D_1にあるとき

$$\begin{aligned}&\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX\\&=\triangle ABC+2\triangle BCX\\&=1+2\triangle BCX\end{aligned}$$

であるから，①を満たすのは

$$\frac{1}{2}\leqq \triangle BCX\leqq 1$$

のときである．

よって，半直線AB上に2点F，F′を，$AF=\frac{3}{2}AB$，$AF'=2AB$を満たすようにとり，半直線AC上に2点G，G′を，$AG=\frac{3}{2}AC$，$AG'=2AC$を満たすようにとるとき，点Xは台形FF′G′Gの周および内部を動き，台形FF′G′Gの面積Sは

$$S=2^2\triangle ABC-\left(\frac{3}{2}\right)^2\triangle ABC=\frac{7}{4}$$

である．

（ii）点Xが領域E_1にあるとき

$$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=2\triangle BCX-\triangle ABC=2\triangle BCX-1$$

であるから，①を満たすのは

$$\frac{3}{2}\leqq \triangle BCX\leqq 2$$

のときである．

よって，半直線BA上に2点I，I′を，$AI=\frac{1}{2}BA$，$AI'=BA$を満たすようにとり，半直線CA上に2点J，J′を，$AJ=\frac{1}{2}CA$，$AJ'=CA$を満たすようにとるとき，点Xは台形II′J′Jの周上および内部を動き，台形II′J′Jの面積Tは

$$T=\triangle ABC-\left(\frac{1}{2}\right)^2\triangle ABC=\frac{3}{4}$$

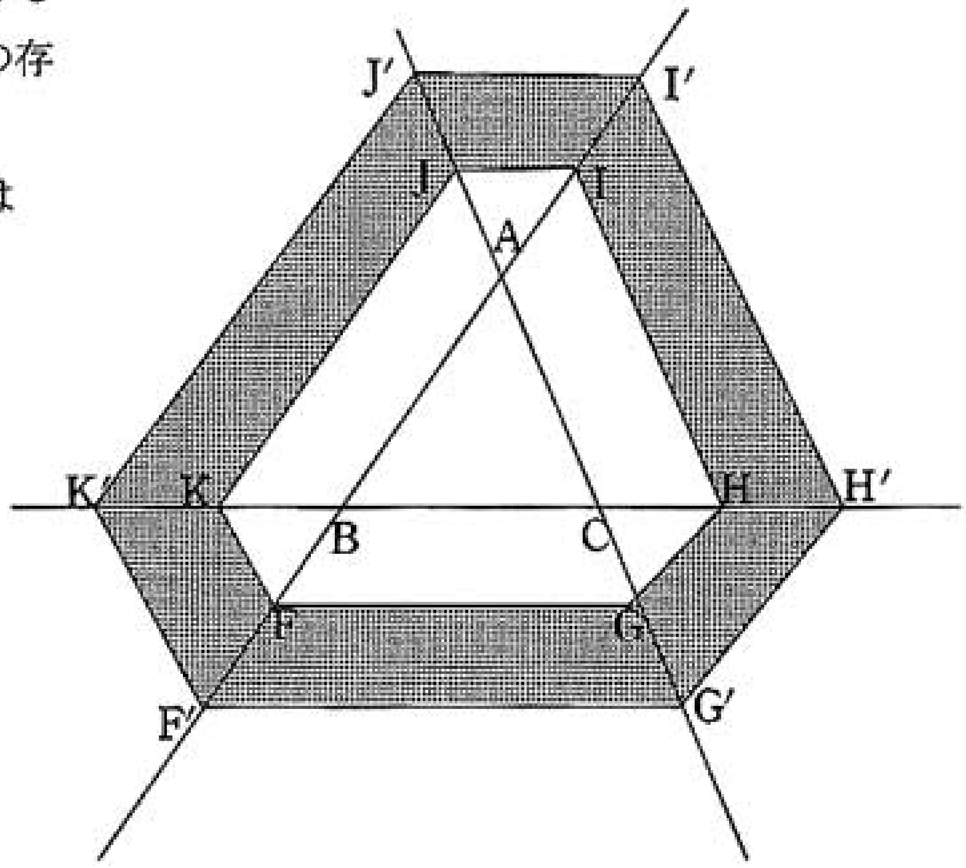
である．

点 X が領域 D_2, D_3, E_2, E_3 にあるときも（i），（ii）と同様に考えると，点 X の存在範囲は右図の網目部分になる．

したがって，X の動きうる範囲の面積は

$$3S+3T=3\cdot\frac{7}{4}+3\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{2}$$

である．



理科第３問

(1)　$-1<t\leqq 1$において，

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}}$$
$$=3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$
$$=3\sqrt{-1+\frac{2}{1+t}}$$

であり，$\dfrac{2}{1+t}$はtの単調減少関数である．

よって，$-1<t\leqq 1$におけるtの関数$\dfrac{y(t)}{x(t)}$は単調に減少する．

(2)　$-1\leqq t\leqq 1$においては$1+t\geqq 0$であるから，

$$f(t)=\sqrt{\{x(t)\}^2+\{y(t)\}^2}$$
$$=\sqrt{(1+t)^2(1+t)+9(1+t)^2(1-t)}$$
$$=(1+t)\sqrt{10-8t}$$

と表される．このとき，

$$f'(t)=\sqrt{10-8t}+(1+t)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{\sqrt{10-8t}}$$
$$=\frac{(10-8t)-4(1+t)}{\sqrt{10-8t}}$$
$$=\frac{6(1-2t)}{\sqrt{10-8t}}$$

より，$-1\leqq t\leqq 1$におけるtの関数$f(t)$の増減は，下表のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

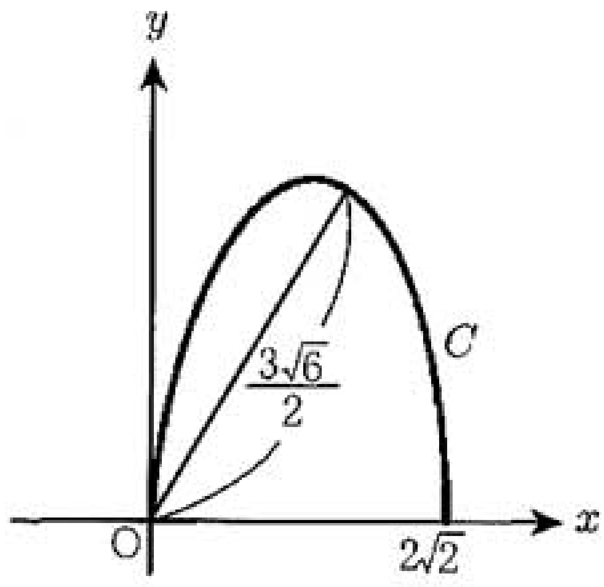
よって，求める最大値は，

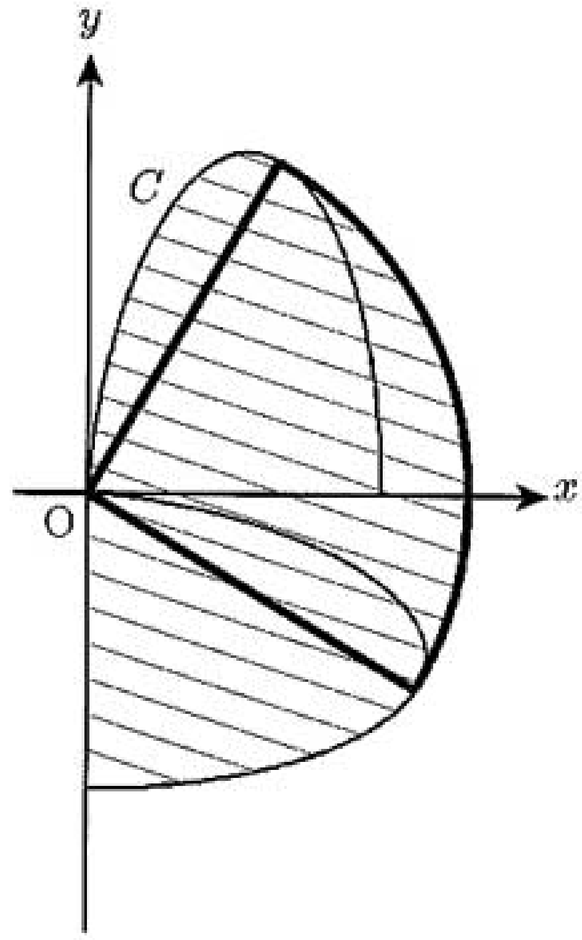
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

である．

(3)　tが$-1\leqq t\leqq 1$を動くときtの関数$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$は0から$2\sqrt{2}$まで単調に増加し，$y(-1)=y(1)=0$である．

さらに，(1)より$-1<t\leqq 1$において線分OPの傾きが単調に減少すること，及び(2)の考察により，Cの概形は左下図のようになり，Dが通過する領域は右下図の斜線部分のようになる．





したがって，求める面積をSとすると，

$$S=(\text{半径}\frac{3\sqrt{6}}{2}\text{の四分円の面積})+(C\text{と}x\text{軸とで囲まれる領域の面積})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}+\int_0^{2\sqrt{2}}ydx$$

$$=\frac{27}{8}\pi+\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる．

ここで，

$$\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}dt$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt$$

$$=\frac{9}{2}\left\{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt+\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt\right\}$$

$$=\frac{9}{2}\cdot(\text{半径1の半円の面積}) \qquad (\because\ t\sqrt{1-t^2}\text{は奇関数})$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{9}{4}\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より，

$$S=\frac{27}{8}\pi+\frac{9}{4}\pi$$

$$=\frac{45}{8}\pi$$

である．

理系第4問

(1) $$\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2=\sum_{m=0}^{n-1}(2^m)^2+2a_{n,\,2}$$

より，

$$\begin{aligned}a_{n,\,2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2-\sum_{m=0}^{n-1}(2^m)^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{m=0}^{n-1}2^m\right)^2-\sum_{m=0}^{n-1}4^m\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2-\frac{4^n-1}{4-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}(2^n-1)\left(2^n-1-\frac{2^n+1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)\end{aligned}$$

(2) n 個の単項式 $2^m x$ $(m=0,\,1,\,\cdots,\,n-1)$ から，異なる k 個を選んでそれらの積をとり，k 個の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の単項式の和は $a_{n,\,k}x^k$ であるから，

$$f_n(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x)$$

である.

よって，

$$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$$
$$f_n(2x)=(1+2^1x)(1+2^2x)\cdot\cdots\cdot(1+2^nx)$$

であるから，

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)(1+2^nx) \qquad \cdots\cdots①$$
$$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)f_n(2x)=(1+x)f_n(2x) \qquad \cdots\cdots②$$

すなわち，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx,\quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$$

(3) ①，②，すなわち，

$$\begin{aligned}&1+a_{n+1,\,1}x+\cdots+a_{n+1,\,k}x^k+a_{n+1,\,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,\,n+1}x^{n+1}\\&\quad=(1+a_{n,\,1}x+\cdots+a_{n,\,k}x^k+a_{n,\,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,\,n}x^n)(1+2^nx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&1+a_{n+1,\,1}x+\cdots+a_{n+1,\,k}x^k+a_{n+1,\,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,\,n+1}x^{n+1}\\&\quad=(1+x)\{1+a_{n,\,1}(2x)+\cdots+a_{n,\,k}(2x)^k+a_{n,\,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots+a_{n,\,n}(2x)^n\}\end{aligned}$$

の両辺の x^{k+1} の係数を比較して，

$$a_{n+1,\,k+1}=a_{n,\,k+1}+2^na_{n,\,k} \qquad \cdots\cdots③$$
$$a_{n+1,\,k+1}=2^{k+1}a_{n,\,k+1}+2^ka_{n,\,k} \qquad \cdots\cdots④$$

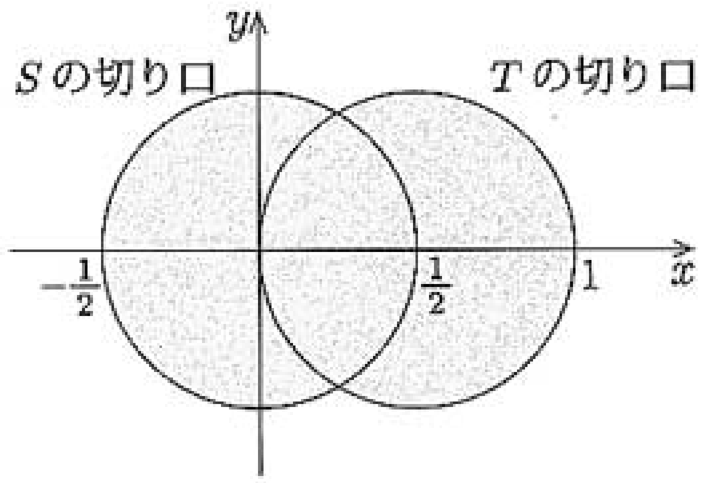
③を用いて，④から，$a_{n,\,k+1}$ を消去すると，

$$a_{n+1,\,k+1}=2^{k+1}(a_{n+1,\,k+1}-2^na_{n,\,k})+2^ka_{n,\,k}$$

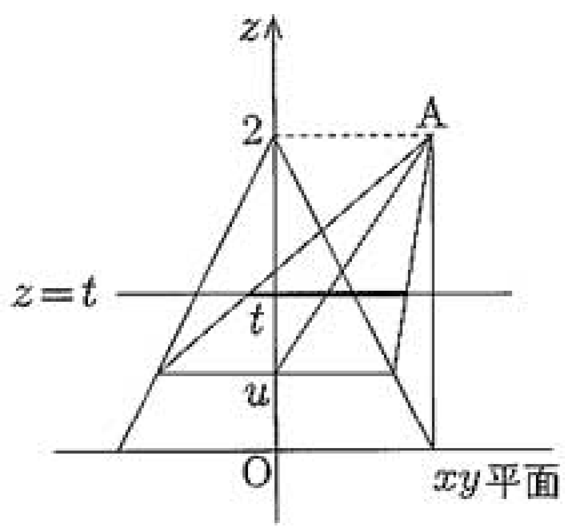
$$\therefore\quad \frac{a_{n+1,\,k+1}}{a_{n,\,k}}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$$

理 科 第 5 問

(1) 直円錐Sおよび斜円錐Tを底面と平行な平面$z=1$で切ると円(内部を含む)となり，z座標から相似比を考えると，どちらも半径は$\dfrac{1}{2}$である。Sの切り口の中心は$(0,\ 0,\ 1)$，Tの切り口の中心は線分OAと平面$z=1$の交点$\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$であることを考え，平面$z=1$による$S$および$T$の切り口は次図のようになる。



(2) 点PがSを動くとき線分APが通過する部分をKとして，Kを平面$z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$で切ったときの断面を考える。



uを$0 \leqq u \leqq t$を満たす実数として，点PがSと平面$z=u$との交わりの図形上を動くとき，線分APと平面$z=t$との交点をQとすると

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{QA} : \mathrm{PA} = (t-u) : (2-t) : (2-u)$$

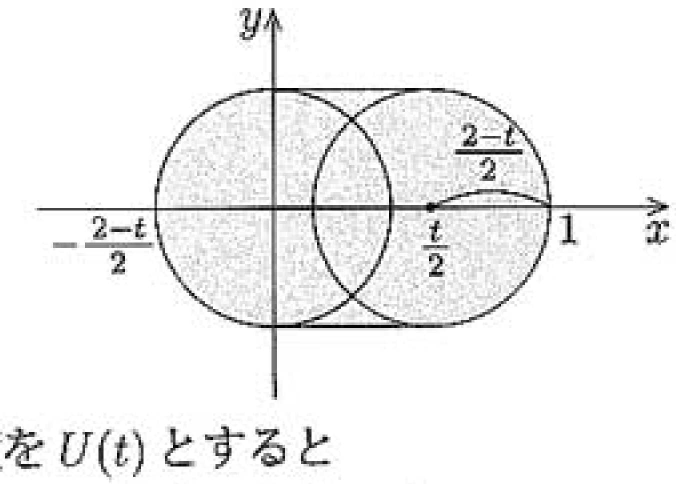
であるから，(1)と同様に考えて，平面$z=t$上で点Qがえがく図形は円(内部を含む)であり，

$$\text{中心の}\ x\ \text{座標は}\ 1 \cdot \frac{t-u}{2-u} = 1 - \frac{2-t}{2-u},$$

$$\text{半径は}\ 1 \cdot \frac{2-u}{2} \cdot \frac{2-t}{2-u} = \frac{2-t}{2}$$

である。

uを$0 \leqq u \leqq t$の範囲で動かすことにより，図形Kの平面$z=t$による切り口は下図のようになる。



この断面積を$U(t)$とすると

$$U(t) = \pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 + \frac{t}{2}(2-t) = \frac{\pi}{4}(t-2)^2 - \frac{1}{2}t^2 + t$$

であるから，線分APが通過する部分の体積Vは

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 U(t)\,dt \\
&= \left[\frac{\pi}{12}(t-2)^3 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 \\
&= \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

である。

理 科 第 6 問

(1) $f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)$ とおく．$A>1$ と $-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0,\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0,\ f\left(\frac{5\pi}{4}\right)>0,\ f\left(\frac{7\pi}{4}\right)<0$$

であるから，方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$ のそれぞれに解をもつ．$f(0)\leqq 0$ のときは方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ に解をもち，$f(0)>0$ のときは $f(2\pi)=f(0)>0$ だから方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right)$ に解をもつ．いずれの場合も，方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $[0,\ 2\pi)$ に少なくとも 4 個の解をもつ．

(2) D 内の点 P と C 上の点 Q は次のように表せる．

$$\mathrm{P}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\cos t,\ s\sin t\right)\ \ (0\leqq s<r,\ 0\leqq t<2\pi)$$

$$\mathrm{Q}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$$

Q における C の接線は直線 $\dfrac{(\sqrt{2}\cos\theta)x}{2}+(\sin\theta)y=1$ であるから，Q における C の法線は直線

$$(\sqrt{2}\sin\theta)(x-\sqrt{2}\cos\theta)-(\cos\theta)(y-\sin\theta)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

である．P が直線 ① 上にあるための条件は

$$(\sqrt{2}\sin\theta)\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\cos t-\sqrt{2}\cos\theta\right)-(\cos\theta)(s\sin t-\sin\theta)=0$$

すなわち

$$\sin\theta\cos\theta-s(\sin\theta\cos t-\cos\theta\sin t)=0$$

すなわち

$$\sin 2\theta-2s\sin(\theta-t)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．問題文の「条件」を N とすると，N は，② を満たす θ が少なくとも 4 個存在することである．

$s=0$ のときは，② を満たす θ が 4 個 $\left(\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 存在するから，N が成り立つ．

$0<s<r$ のときは，② を変形すると

$$\frac{1}{2s}\sin 2\theta-\sin(\theta-t)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

であり，$\dfrac{1}{2s}$ の変域は $\dfrac{1}{2r}<\dfrac{1}{2s}$ である．

(ア) $\dfrac{1}{2r}\geqq 1$ すなわち $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき．

すべての s，t $(0<s<r,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ に対し，$\dfrac{1}{2s}>1$ であるから (1) より ③ を満たす θ が少なくとも 4 個存在する．よって，D 内のすべての点 P に対し N が成り立つ．

(イ) $\dfrac{1}{2r}<1$ すなわち $\dfrac{1}{2}<r<1$ のとき.

例えば, $s=\dfrac{1}{2}$ かつ $t=\dfrac{7\pi}{4}$ とすると,

$$③ \iff \sin 2\theta=\sin\left(\theta-\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\iff 2\theta=\theta-\frac{7\pi}{4}+2\pi\times(\text{整数}) \text{ または } 2\theta=\pi-\left(\theta-\frac{7\pi}{4}\right)+2\pi\times(\text{整数})$$

$$\iff \theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{11\pi}{12},\ \frac{19\pi}{12}$$

となり, ③を満たす θ が3個しか存在しない. よって, D 内のある点Pに対しNは成り立たない.

以上から, D 内のすべての点Pが「条件」を満たすような r $(0<r<1)$ が存在し, そのような r の最大値は $\dfrac{1}{2}$ である.