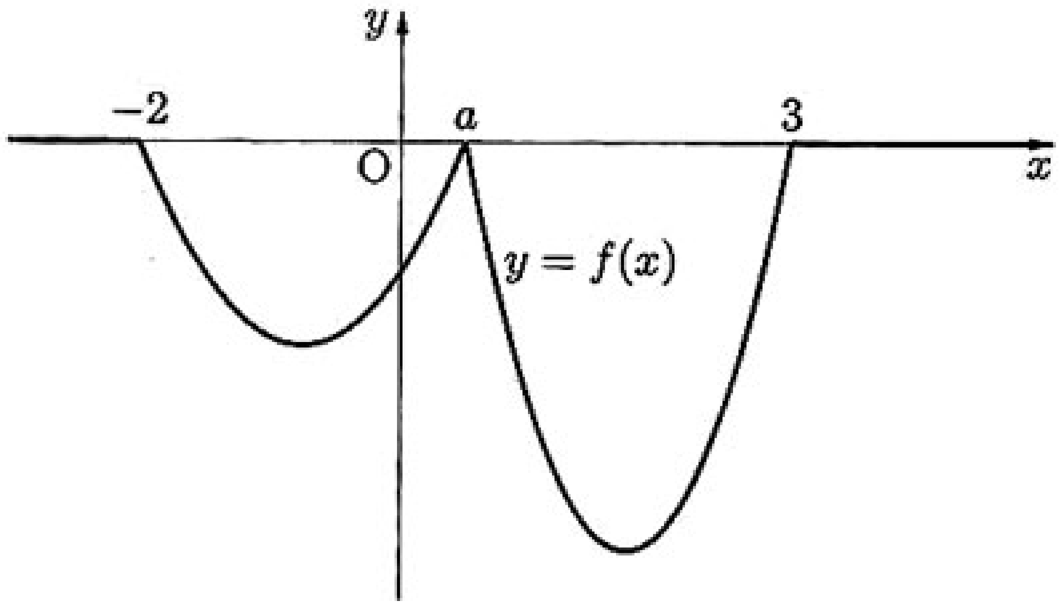
$\boxed{1}$

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<-2\text{ のとき})\\ (x-a)(x+2) & (-2\leqq x\leqq a\text{ のとき})\\ 2(x-a)(x-3) & (a\leqq x\leqq 3\text{ のとき})\\ 0 & (x>3\text{ のとき})\end{cases}$$

(1) a は $-2\leqq a\leqq 3$ を満たす実数であるから，$y=f(x)$ のグラフは下の太線となる．



曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned}S(a)&=-\int_{-2}^{a}(x+2)(x-a)\,dx-2\int_{a}^{3}(x-a)(x-3)\,dx\\&=\frac{(a+2)^3}{6}+2\frac{(3-a)^3}{6}\\&=\frac{(a+2)^3}{6}-\frac{(a-3)^3}{3}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) $S(a)$ を a で微分すると

$$\begin{aligned}S'(a)&=\frac{(a+2)^2}{2}-(a-3)^2\\&=-\frac{a^2}{2}+8a-7\\&=-\frac{1}{2}\{a-(8-5\sqrt{2})\}\{a-(8+5\sqrt{2})\}\end{aligned}$$

となり，増減表をかくと下の表となる．

a	-2	$\cdots$	$8-5\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

したがって，$S(a)$ が最小となる a の値は　$a=8-5\sqrt{2}$　である．　……(答)

また，$S(-2)=\dfrac{5^3}{3}$，$S(3)=\dfrac{5^3}{6}$ であり，$S(-2)>S(3)$ であるから，$S(a)$ が最大となる a の値は　$a=-2$　である．　……(答)

$\boxed{2}$

(1)　$n \geqq 3$のとき，二項定理により，

$$
\begin{aligned}
(2+1)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 2^n + {}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n 2^0 \\
&> {}_n\mathrm{C}_0 2^n + {}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2} \\
&= 2^n + n \cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2} \\
&= 2^n + n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-3} \\
&= 2^n + n^2 \cdot 2^{n-3} + 3n \cdot 2^{n-3} \\
&\geqq 2^n + n^2 \cdot 2^{3-3} + 3 \cdot 3 \cdot 2^{3-3} \\
&> 2^n + n^2 + 8
\end{aligned}
$$

すなわち，不等式

$$2^n + n^2 + 8 < 3^n$$

が成り立つ．

（証明終わり）

（別証）

$n \geqq 3$のとき不等式

$$P(n)\ :\ 2^n + n^2 + 8 < 3^n$$

が成り立つことを，nに関する数学的帰納法で示す．

（I）　$n = 3$のとき，

$$2^n + n^2 + 8 = 2^3 + 3^2 + 8 = 25$$
$$3^n = 3^3 = 27$$

であるから，$P(3)$が成り立つ．

（II）　ある$k\,(\geqq 3)$に対して$P(k)$が成り立つと仮定すると，両辺に3をかけて，

$$3 \cdot 2^k + 3k^2 + 24 < 3^{k+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

が成り立つ．

ここで，

$$
\begin{aligned}
&3 \cdot 2^k + 3k^2 + 24 - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} \\
&= (3-2) \cdot 2^k + 3k^2 - (k^2 + 2k + 1) + (24 - 8) \\
&= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 \\
&> 2k(k-1) \\
&\geqq 2 \cdot 3 \cdot (3-1) \quad (\because\ k \geqq 3) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

であるから，

$$2^k + k^2 + 8 < 3 \cdot 2^k + 3k^2 + 24 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つ．

よって，①，②より，

$$2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$$

が成り立ち，$P(k+1)$も成り立つ．

（証明終わり）

(2)　nが正の整数のとき，不等式

$$2^n+n^2+8 \geqq 3^n \quad \cdots\cdots③$$

を満たすnは，(1)で示した事実を考えると，

$$n=1 \text{ または } n=2$$

以外にはない．

ここで，

・$n=1$のとき，$2^n+n^2+8=11$，$3^n=3$であるから，③が成り立つ．

・$n=2$のとき，$2^n+n^2+8=16$，$3^n=9$であるから，③が成り立つ．

したがって，求めるnは，

1または2 ……(答)

がすべてである．

(3)

$$2^n+n^2+8=3^n+an+b \quad \cdots\cdots◎$$

において，nは正，a，bが0以上であることより$an+b \geqq 0$であることと，(1)の事実を考慮すると，◎を満たす正の整数nは，

$$n=1 \text{ または } n=2$$

以外にはない．

（i）　$n=1$のとき，◎は

$$a+b=8 \quad \cdots\cdots⑤$$

となるので，⑤を満たす0以上の整数の組(a,b)は，

$$(k\,,8-k)\ \ (k=0,1,2,3,4,5,6,7,8)$$

の9組がすべてである．

（ii）　$n=2$のとき，◎は

$$2a+b=7 \quad \cdots\cdots⑤$$

となるので，⑤を満たす0以上の整数の組(a,b)は，

$$(l\,,7-2l)\ \ (l=0,1,2,3)$$

の4組がすべてである．

以上から，求める組(a,b,n)は，

$$(k\,,8-k\,,1)\ \ (k=0,1,2,3,4,5,6,7,8)$$

$$(l\,,7-2l\,,2)\ \ (l=0,1,2,3)$$

……(答)

の13組がすべてである．

$\boxed{3}$

$$C : (x-a)^2+(y-2)^2=a^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$L : -4x+3y+a=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$M : 3x+4y-7a=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

(1) L と M の交点は，② と ③ を連立して

$$(a,\ a)$$

である．この点が C 上にあるような a の値は，① に代入して

$$(a-2)^2=a^2 \qquad \therefore \quad a=1 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，C の中心 $(a,\ 2)$ と直線 L との距離を考えて

$$\frac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a|$$

$$|6-3a|<5|a|$$

$$(6-3a)^2-5^2a^2<0$$

$$(6-8a)(6+2a)<0$$

$$4(3-4a)(3+a)<0$$

よって，求める a の値の範囲は

$$a<-3 \text{ または } \frac{3}{4}<a \qquad \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) C と M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は

$$\frac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a|$$

$$|8-4a|<5|a|$$

$$(8-4a)^2-5^2a^2<0$$

$$(8-9a)(8+a)<0$$

これを満たす a の値の範囲は

$$a<-8 \text{ または } \frac{8}{9}<a \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．

集合 $\{\mathrm{P}\,|\,$点 P は C と L の共有点$\}\cup\{\mathrm{P}\,|\,$点 P は C と M の共有点$\}$ の要素の個数が 3 となるのは，C と L の共有点の個数を l，C と M の共有点の個数を m とすると

- $(l,\ m)=(2,\ 1)$ または $(1,\ 2)$
- $(l,\ m)=(2,\ 2)$ であり，一致する共有点がある

の2通りがある．

$l=1$ となるのは　$a=-3$ または $\dfrac{3}{4}$ …… ⑥ のときであり，

$m=1$ となるのは　$a=-8$ または $\dfrac{8}{9}$ …… ⑦ である．

$(l,\ m)=(2,\ 1)$ すなわち,「④ かつ ⑦」となる a の値は $a=-8,\ \dfrac{8}{9}$ である．

$(l,\ m)=(1,\ 2)$ すなわち,「⑥ かつ ⑤」となる a は存在しない．

$(l,\ m)=(2,\ 2)$ であり，一致する共有点がある a の値は，(1) より $a=1$ である．

よって，求める a の値は

$$a=-8,\ \frac{8}{9},\ 1 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{4}$

(1) $\overrightarrow{p}=(x,\ y)$ を $\overrightarrow{p}=s(2,\ -1)+t(-1,\ 2)$ で定めるから，

$$\begin{cases} x=2s-t \\ y=-s+2t \end{cases}$$

よって，

$$x+y=(2s-t)+(-s+2t)=s+t$$

6 枚の硬貨を同時に投げたとき表裏が出た枚数がそれぞれ s，t で，$s+t=6$ であるから，

$$x+y=6 \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

(2) $\overrightarrow{p}=(0,\ 6)$ のとき

$$\begin{cases} 2s-t=0 \\ -s+2t=6 \end{cases} \qquad \therefore\ s=2,\ t=4$$

求める確率は，6 枚の硬貨を同時に投げたとき表が出た硬貨が 2 枚のときの確率なので

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

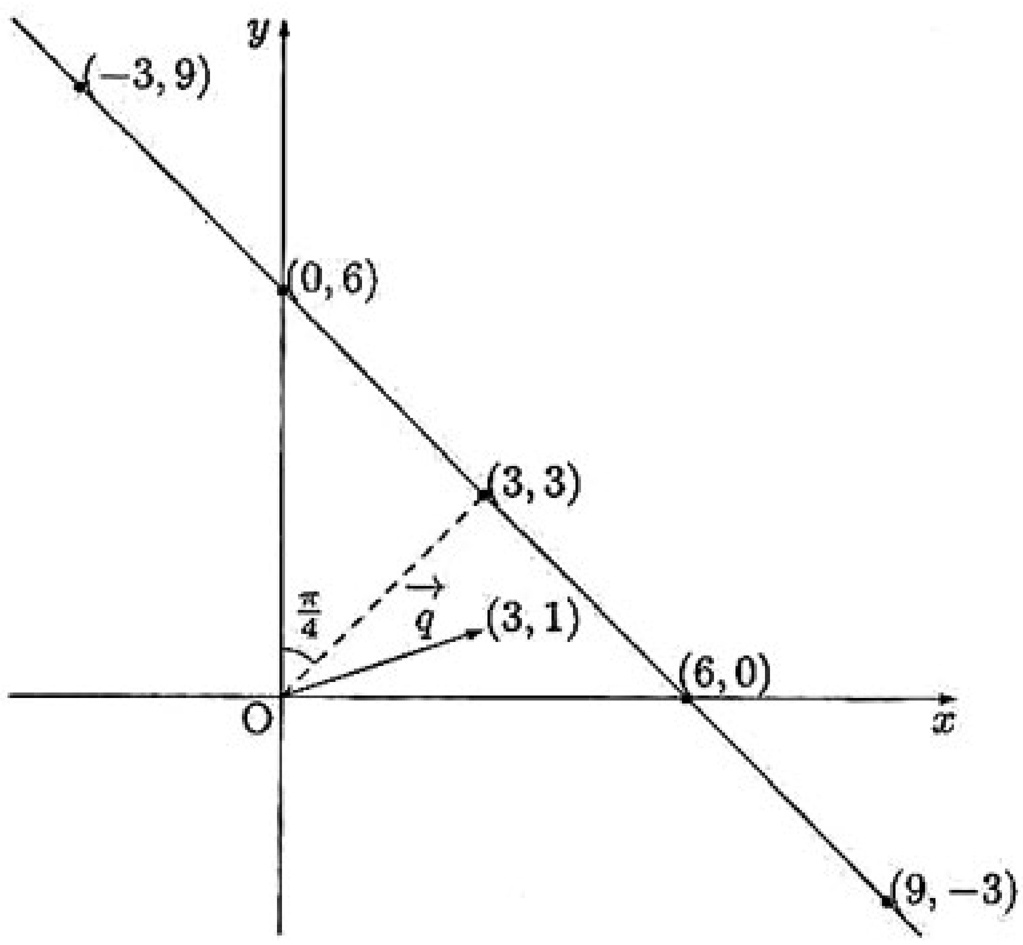
(3) 起こり得る組 $(s,\ t)$ は

$(0,\ 6)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$，$(6,\ 0)$

これらに対応する組 $(x,\ y)$ は (1) の式より，それぞれ，

$(-6,\ 12)$，$(-3,\ 9)$，$(0,\ 6)$，$(3,\ 3)$，$(6,\ 0)$，$(9,-3)$，$(12,-6)$

であり，これらは xy 平面上で直線 $x+y=6$ 上にある．



2 つのベクトル $\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，

- $(x,\ y)=(0,\ 6)$ のとき，図より $\theta > \dfrac{\pi}{4} > \dfrac{\pi}{6}$ である．
- $(x,\ y)=(3,\ 3)$ のとき，$\overrightarrow{p}$，$\overrightarrow{q}$ に平行な直線の傾きは，それぞれ，1，$\dfrac{1}{3}$ であるから，

$$\tan\theta = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$$

より，$\theta < \dfrac{\pi}{6}$ である．

- $(x,\ y)=(6,\ 0)$ のとき，同様に，

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{3}-0}{1+\frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$$

より，$\theta < \dfrac{\pi}{6}$ である．

- $(x,\ y)=(9,\ -3)$ のとき，同様に，

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} > \frac{4}{4\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$$

より，$\theta > \dfrac{\pi}{6}$ である．

- $(x,\ y)=(-6,\ 12)$，$(-3,\ 9)$，$(12,\ -6)$ のときは，図より，$\theta > \dfrac{\pi}{6}$ であることがわかる．

したがって，求める確率は，$(x,\ y)=(3,\ 3)$，$(6,\ 0)$，すなわち，$(s,\ t)=(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$ となる場合の確率で，

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{35}{64} \qquad \cdots\cdots\ (答)$$

である．