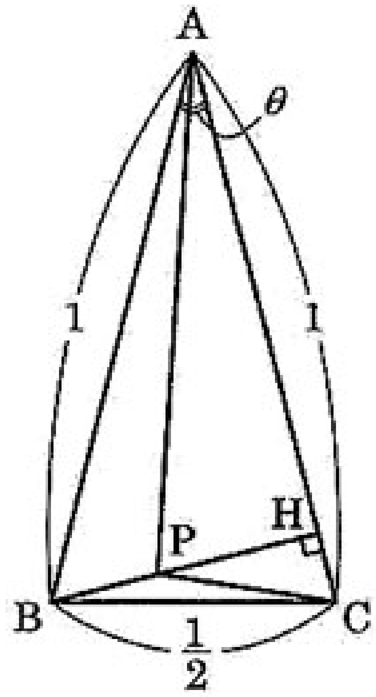


$\boxed{1}$

(1)　△ABC に余弦定理を用いて,

$$\cos\theta=\frac{1^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot 1\cdot 1}=\frac{7}{8} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

である. また, $0<\theta<\pi$ より, $\sin\theta>0$ であるから,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

である.

(2)　$AH=AB\cos\theta=\frac{7}{8}$, $CH=AC-AH=\frac{1}{8}$ である. また, $BH=AB\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$ であるから

$$BP=\frac{\sqrt{15}}{8}s,\quad PH=\frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)$$

である. したがって

$$\begin{aligned} AP^2&=AH^2+PH^2\\ &=\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)\right\}^2\\ &=\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CP^2&=CH^2+PH^2\\ &=\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)\right\}^2\\ &=\frac{1}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} AP^2+BP^2+CP^2&=\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2+\frac{15}{64}s^2+\frac{1}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2\\ &=\frac{45}{64}s^2-\frac{15}{16}s+\frac{5}{4}\\ &=\frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{15}{16} \end{aligned}$$

である. $0<s<1$ より, $AP^2+BP^2+CP^2$ は

$s=\frac{2}{3}$ で最小値 $\frac{15}{16}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (答)

をとる.

$\boxed{2}$

$$C: (x-a)^2+(y-2)^2=a^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$L: -4x+3y+a=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$M: 3x+4y-7a=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

(1) L と M の交点は，② と ③ を連立して

$$(a,\ a)$$

である．この点が C 上にあるような a の値は，① に代入して

$$(a-2)^2=a^2 \qquad \therefore \quad a=1 \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，C の中心 $(a,\ 2)$ と直線 L との距離を考えて

$$\frac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a|$$

$$|6-3a|<5|a|$$

$$(6-3a)^2-5^2a^2<0$$

$$(6-8a)(6+2a)<0$$

$$4(3-4a)(3+a)<0$$

よって，求める a の値の範囲は

$$a<-3 \text{ または } \frac{3}{4}<a \qquad \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(3) C と M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は

$$\frac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a|$$

$$|8-4a|<5|a|$$

$$(8-4a)^2-5^2a^2<0$$

$$(8-9a)(8+a)<0$$

これを満たす a の値の範囲は

$$a<-8 \text{ または } \frac{8}{9}<a \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．

集合 $\{P\,|\,$点 P は C と L の共有点$\} \cup \{P\,|\,$点 P は C と M の共有点$\}$ の要素の個数が 3 となるのは，C と L の共有点の個数を l，C と M の共有点の個数を m とすると

- $(l,\ m)=(2,\ 1)$ または $(1,\ 2)$
- $(l,\ m)=(2,\ 2)$ であり，一致する共有点がある

の 2 通りがある.

　$l=1$ となるのは　$a=-3$ または $\dfrac{3}{4}$ …… ⑥ のときであり,

　$m=1$ となるのは　$a=-8$ または $\dfrac{8}{9}$ …… ⑦ である.

$(l,\ m)=(2,\ 1)$ すなわち,「④ かつ ⑦」となる a の値は $a=-8,\ \dfrac{8}{9}$ である.

$(l,\ m)=(1,\ 2)$ すなわち,「⑥ かつ ⑤」となる a は存在しない.

$(l,\ m)=(2,\ 2)$ であり，一致する共有点がある a の値は，(1) より $a=1$ である.

よって，求める a の値は

$$a=-8,\ \frac{8}{9},\ 1 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

3

(1)　$n \geqq 3$のとき，二項定理により，

$$
\begin{aligned}
(2+1)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 2^n + {}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n 2^0 \\
&> {}_n\mathrm{C}_0 2^n + {}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2} \\
&= 2^n + n\cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2^{n-2} \\
&= 2^n + n\cdot 2^{n-1} + n(n-1)\cdot 2^{n-3} \\
&= 2^n + n^2\cdot 2^{n-3} + 3n\cdot 2^{n-3} \\
&\geqq 2^n + n^2\cdot 2^{3-3} + 3\cdot 3\cdot 2^{3-3} \\
&> 2^n + n^2 + 8
\end{aligned}
$$

すなわち，不等式

$$2^n + n^2 + 8 < 3^n$$

が成り立つ．

（証明終わり）

（別証）

$n \geqq 3$のとき不等式

$$P(n)\ :\ 2^n + n^2 + 8 < 3^n$$

が成り立つことを，nに関する数学的帰納法で示す．

（Ⅰ）　$n = 3$のとき，

$$2^n + n^2 + 8 = 2^3 + 3^2 + 8 = 25$$

$$3^n = 3^3 = 27$$

であるから，$P(3)$が成り立つ．

（Ⅱ）　ある$k\ (\geqq 3)$に対して$P(k)$が成り立つと仮定すると，両辺に3をかけて，

$$3\cdot 2^k + 3k^2 + 24 < 3^{k+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

ここで，

$$
\begin{aligned}
&3\cdot 2^k + 3k^2 + 24 - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} \\
&= (3-2)\cdot 2^k + 3k^2 - (k^2 + 2k + 1) + (24 - 8) \\
&= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 \\
&> 2k(k-1) \\
&\geqq 2\cdot 3\cdot (3-1)\ \ (\because\ k \geqq 3) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

であるから，

$$2^k + k^2 + 8 < 3\cdot 2^k + 3k^2 + 24 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

よって，①，②より，

$$2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$$

が成り立ち，$P(k+1)$も成り立つ．

（証明終わり）

(2)　nが正の整数のとき，不等式

$$2^n+n^2+8 \geqq 3^n \qquad \cdots\cdots ③$$

を満たすnは，(1)で示した事実を考えると，

$$n=1 \text{ または } n=2$$

以外にはない．

ここで，

・$n=1$のとき，$2^n+n^2+8=11$，$3^n=3$であるから，③が成り立つ．

・$n=2$のとき，$2^n+n^2+8=16$，$3^n=9$であるから，③が成り立つ．

したがって，求めるnは，

$$1 \text{ または } 2 \qquad \cdots\cdots (答)$$

がすべてである．

(3)

$$2^n+n^2+8=3^n+an+b \qquad \cdots\cdots ◎$$

において，nは正，a，bが0以上であることより$an+b \geqq 0$であることと，(1)の事実を考慮すると，◎を満たす正の整数nは，

$$n=1 \text{ または } n=2$$

以外にはない．

（i）　$n=1$のとき，◎は

$$a+b=8 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となるので，⑤を満たす0以上の整数の組(a,b)は，

$$(k\,,8-k)\ \ (k=0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8)$$

の9組がすべてである．

（ii）　$n=2$のとき，◎は

$$2a+b=7 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となるので，⑤を満たす0以上の整数の組(a,b)は，

$$(l\,,7-2l)\ \ (l=0\,,1\,,2\,,3)$$

の4組がすべてである．

以上から，求める組(a,b,n)は，

$$(k\,,8-k\,,1)\ \ (k=0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8)$$

$$(l\,,7-2l\,,2)\ \ (l=0\,,1\,,2\,,3)$$

$$\cdots\cdots (答)$$

の13組がすべてである．

4

(1) 2回の試行の結果，手元に白玉が2個あるのは，白玉を取り出しかつ硬貨が表となることが続けて2回起こる場合である．よって，求める確率は

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{40}$$

である．

(2) 3回の試行の結果，手元の玉が白玉1個，赤玉1個の計2個となるのは，3回の試行のうち，1回は白玉を取り出しかつ硬貨が表となり，もう1回は赤玉を取り出しかつ硬貨が表となり，他の1回は硬貨が裏となる場合である．よって求める確率は

$$3!\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{40}$$

である．

(3) $n\geqq5$ のとき，ちょうど n 回目で試行が停止するのは，最初の $n-1$ 回の試行中，ちょうど4回だけ硬貨が表になり，かつ n 回目の試行で硬貨が表となる場合である．

よって，求める確率 p_n は

$$\begin{aligned}p_n&={}_{n-1}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot3\cdot2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot2^{n+3}}\end{aligned}$$

である．

(4) $n\geqq5$ のとき

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}}{\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot2^{n+3}}}=\frac{n}{2(n-4)}$$

である．

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$ となるのは，$\dfrac{n}{2(n-4)}>1$ より　$n>2(n-4)$　すなわち　$n<8$ であり，

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ となるのは，$n>8$，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=1$ となるのは，$n=8$ のときであるから

$$p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>p_{11}>\cdots\cdots$$

が成り立つ．

したがって，p_n が最大となる n は

$$n=8,9$$

である．

$\boxed{5}$

(1) z の実部を x, 虚部を y とすると

$$z=\frac{-(t-i)}{(t+i)(t-i)}=\frac{-t+i}{t^2+1}=-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}i$$

であり, t は実数であるから

$$x=-\frac{t}{t^2+1},\quad y=\frac{1}{t^2+1}$$ ……(答)

である.

(2)

$$z-\frac{i}{2}=\frac{-2-i(t+i)}{2(t+i)}=\frac{-1-ti}{2(t+i)}$$

より

$$\left|z-\frac{i}{2}\right|^2=\frac{|-1-ti|^2}{|2(t+i)|^2}=\frac{1+t^2}{4(t^2+1)}=\frac{1}{4}$$

であるから

$$\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$$ ……(答)

である.

(3) まず, (2) の結果より, 点 z は中心が点 $\frac{i}{2}$ で, 半径が $\frac{1}{2}$ である円 C 上にある.

次に, $\theta=\arg z\ (0\leqq\theta<2\pi)$ として, θ の変域を求める.

(I) $t=0$ のとき, $z=i$ であるから, $\theta=\frac{\pi}{2}$ である.

(II) $t\neq 0$ のとき, $x\neq 0$ より

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{1}{t}$$

である. よって, t が $-1\leqq t\leqq 1\ (t\neq 0)$ の範囲を動くとき, $\tan\theta$ は

$$\tan\theta\leqq -1 \text{ または } 1\leqq\tan\theta$$

の範囲を動く. すなわち, θ は

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$$

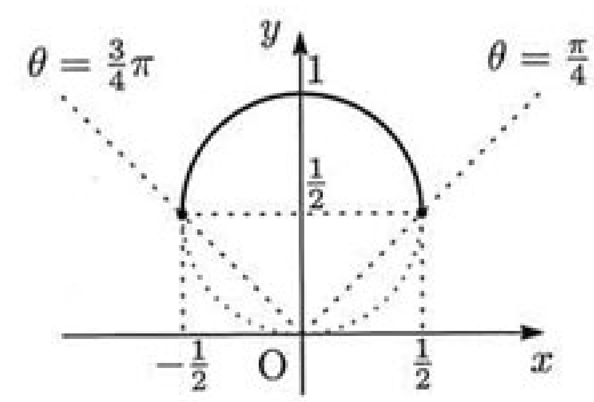
の範囲を動く.

(I), (II) より, θ の変域は

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$$ ……①

である.

以上より, z の描く図形は円 C の①を満たす部分であり, 図示すると右図の太線部となる.



$\boxed{6}$

$$A(m,\,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

(1) $t=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=-1$　$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin t,\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$ に注意して,

$$\begin{aligned}A(m,\,n)&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-1)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\cos^n t\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin^m x\,dx=A(n,\,m)\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}A(m+2,\,n)+A(m,\,n+2)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx\\&=A(m,\,n)\end{aligned}$$

したがって,

$$A(m,n)=A(n,m),\quad A(m+2,\,n)+A(m,\,n+2)=A(m,\,n)$$

が示された.　　　　(証明終わり)

(2)

$$\begin{aligned}A(m,\,1)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x(\cos x)'(-1)\,dx\\&=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{m+1}\left(\cos^{m+1}\frac{\pi}{2}-\cos^{m+1}0\right)\\&=\frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

…… (答)

(3)

$$\begin{aligned}A(m,\,n+2)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^m x\sin x)\sin^{n+1}x\,dx\\&=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&\qquad+\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}x\,(n+1)\sin^n x\cos x\,dx\\&=0+\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,\,n)\end{aligned}$$

したがって,

$$A(m,\,n+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,\,n)$$

が示された．　(証明終わり)

(4)　(i) n が奇数のとき，(3) の式を繰り返し使うと

$$\begin{aligned} A(m,\, n) &= \frac{n-1}{m+1}A(m+2,\, n-2) = \cdots\cdots \\ &= \frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-2}A(m+n-1,\, 1) \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{n-1}{m+1}\cdot\dfrac{n-3}{m+3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{m+n-2}$ は有理数であり，

(2) より，$A(m+n-1,\, 1) = \dfrac{1}{m+n}$ で，これもまた有理数であるから，それらの積 $A(m,\, n)$ は有理数である．

(ii) m が奇数のとき，(1) の前半より，　$A(m,\, n) = A(n,\, m)$

(i) より，奇数 m に対し $A(n,\, m)$ は有理数であるから，$A(m,\, n)$ も有理数である．

以上で，m または n が奇数ならば，$A(m,\, n)$ は有理数であることが示された．

(証明終わり)