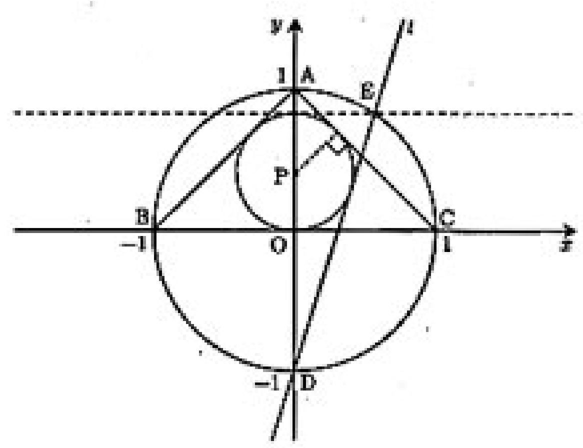
〔1〕



(1) $\triangle$ABC は y 軸に関して対称であり，T の半径が r であるから，中心 P は$(0,\ r)$とおける．また，直線 AC の方程式は，

$$x+y-1=0$$

であり，P と AC との距離が r であるから，

$$\frac{|0+r-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=r \qquad \therefore \quad r-1=\pm\sqrt{2}r$$

である．

よって，$r>0$ より，

$$r=\sqrt{2}-1 \qquad \cdots\cdots①\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 円 $x^2+y^2=1$ と l の方程式より y を消去すると，

$$x^2+(ax-1)^2=1 \qquad \therefore \quad (a^2+1)x^2-2ax=0 \qquad \therefore \quad x=0,\ \frac{2a}{a^2+1}$$

であり，D，E が異なる 2 点であることより，E の x 座標は 0 ではないから，

$$\mathrm{E}\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \frac{a^2-1}{a^2+1}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) l が T に接するとき，P と $l:ax-y-1=0$ との距離を考えて，

$$\frac{|a\cdot 0-r-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=r \qquad \therefore \quad |r+1|=r\sqrt{a^2+1} \qquad \therefore \quad (r+1)^2=r^2(a^2+1)$$

$$\therefore \quad a^2=\frac{(r+1)^2}{r^2}-1 \qquad \cdots\cdots②$$

であり，このとき E の y 座標 Y は，①，②に注意すると，

$$Y=\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{\frac{(r+1)^2}{r^2}-2}{\frac{(r+1)^2}{r^2}}=\frac{(r+1)^2-2r^2}{(r+1)^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2}=1-(3-2\sqrt{2})=2(\sqrt{2}-1)=2r$$

となるから，E を通り x 軸と平行な直線は T に点$(0,\ 2r)$で接する．

(証明終わり)

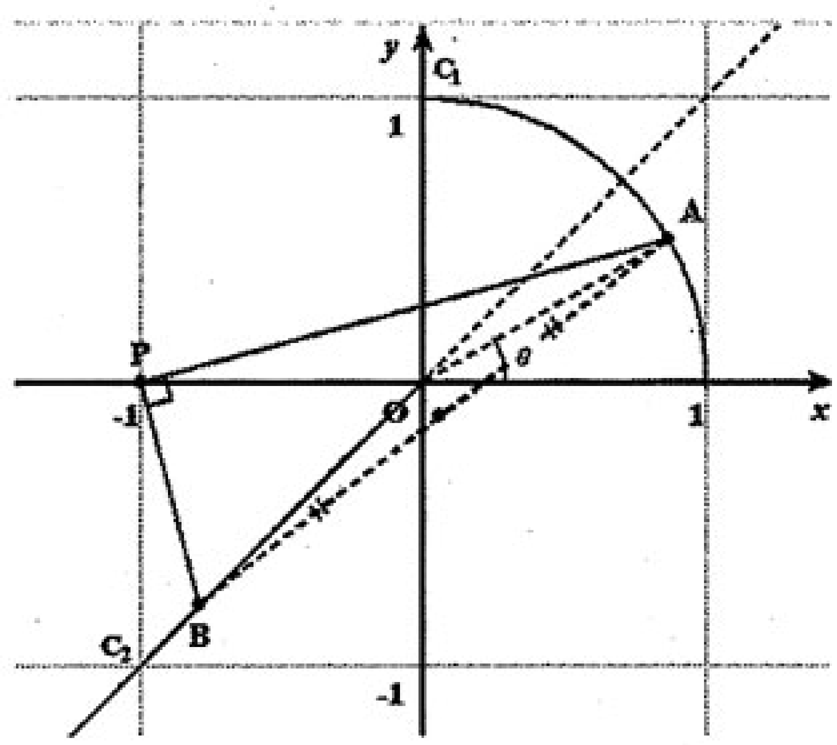
〔2〕

(1)　点BはC_2 : $y=x\,(x\leqq 0)$上の点であるから，座標を(x, x) $(x\leqq 0)$とおける，$\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$であるから，

$$(\cos\theta+1, \sin\theta)\cdot(x+1, x)=0$$

$$\therefore\quad (\cos\theta+1)(x+1)+x\sin\theta=0$$

$$\therefore\quad (\cos\theta+\sin\theta+1)x=-(\cos\theta+1)$$



$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$より$\cos\theta+\sin\theta+1>0$　…①であるから，

$$x=-\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+\sin\theta+1} \qquad \cdots(答)$$

(2)　線分ABの中点のx座標が0以上である条件は，①に注意すると，

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+\sin\theta+1}+\cos\theta\right)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -(\cos\theta+1)+\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta+1)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta\geqq 0$$

$$\therefore\quad \sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)\leqq 0$$

であり，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$より$\cos\theta\geqq 0$であるから，

$$0\leqq\sin\theta\leqq\cos\theta$$

となる，よって，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$より$\sin\theta\geqq 0$であるから，求める条件は

$$\sin\theta\leqq\cos\theta$$

$$\therefore\quad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4} \qquad \cdots(答)$$

〔3〕

（1） $Q_{n-1}\left(x_{n-1},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}\right)$ $(n \geqq 2)$ を通り l と平行な直線の方程式は

$$y=\sqrt{3}(x-x_{n-1})-\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}$$

$$\therefore\quad y=\sqrt{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}x_{n-1}$$

であり，（Ⅱ）よりこの直線の x 切片が x_n なので

$$0=\sqrt{3}x_n-\frac{4\sqrt{3}}{3}x_{n-1}$$

$$x_n=\frac{4}{3}x_{n-1}\qquad(n \geqq 2)$$

となる．よって，数列 $\{x_n\}$ は公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列であるから，（Ⅰ）を考慮すると

$$x_n=1\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

となる．

（2） $l \perp m$ より $\angle P_nOQ_n=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\triangle OP_nQ_n$ の面積は

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot OP_n\cdot OQ_n=\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}x_n=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}n\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$$

となる．

（3） $$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

であるので

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

とおけば

$$S_n=\frac{2}{\sqrt{3}}T_n$$

である．

$$\begin{array}{rl} T_n= & 1+2\left(\frac{4}{3}\right)^1+3\left(\frac{4}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\qquad n\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \\ -)\ \frac{4}{3}T_n= & \qquad\left(\frac{4}{3}\right)^1+2\left(\frac{4}{3}\right)^2+\cdots\cdots+(n-1)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+n\left(\frac{4}{3}\right)^n \\ \hline -\frac{1}{3}T_n= & 1+\left(\frac{4}{3}\right)^1+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-n\left(\frac{4}{3}\right)^n \end{array}$$

$$=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}{\frac{4}{3}-1}-n\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$=-(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n-3$$

$$T_n=3\left\{(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n+3\right\}$$

となるから

$$S_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 3\left\{(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n+3\right\}=\boldsymbol{2\sqrt{3}\left\{(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n+3\right\}}$$

となる．

〔4〕

（1）

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos 2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta(2\cos^2\theta-1)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-2\cos^2\theta+1)(\cos\theta)'\,d\theta=\left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos 2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta-\cos^2 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2\theta-\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos 2\theta-\cos 4\theta-1)\,d\theta=\frac{1}{4}\left[\sin 2\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\mathbf{\frac{4-\pi}{16}}$$

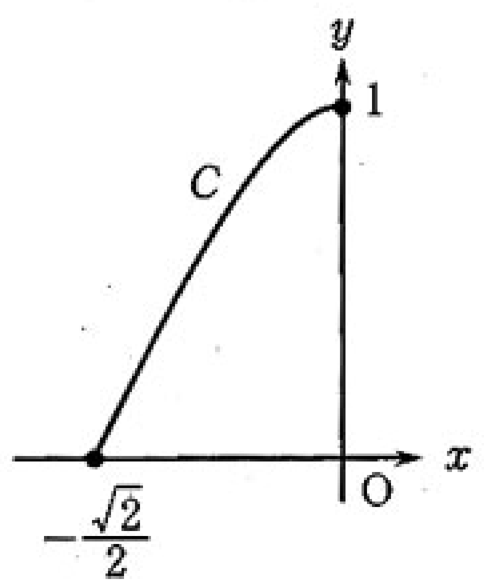
（2）

$$\begin{cases}f'(\theta)=\cos\theta\\ g'(\theta)=2\cos 2\theta\end{cases}$$

となるので

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}=\mathbf{\frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}}$$

となる．$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ より，$\frac{dy}{dx}\geqq 0$（等号は $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときのみ成立）かつ $f'(\theta)>0$ であることと，$\theta=0$ のとき $(x,\ y)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき $(x,\ y)=(0,\ 1)$ であることより，曲線 C の概形は次のようになる．



（3） 求める体積は

$$\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\frac{dy}{d\theta}\,d\theta=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{f(\theta)\}^2g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 2\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sin^2\theta\cos 2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta\cos 2\theta+\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\pi(2I_3-2\sqrt{2}I_2+I_1)$$

$$=\pi\left(2\cdot\frac{4-\pi}{16}-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{-8+16\sqrt{2}-3\pi}{24}\pi}$$

である．

〔5〕

(1)

$$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-\dfrac{c}{1+c}}$$

$$=\frac{1+c}{2(1+c)-c}=\frac{1+c}{2+c} \qquad \cdots(答)$$

$$a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\dfrac{1+c}{2+c}}$$

$$=\frac{2+c}{2(2+c)-(1+c)}=\frac{2+c}{3+c} \qquad \cdots(答)$$

(2) (1)より，すべての正の整数nに対して，$a_n=\dfrac{n-1+c}{n+c}$であると推定される．これを数学的帰納法により示す．

(I) $n=1$のとき

$a_1=\dfrac{1-1+c}{1+c}=\dfrac{c}{1+c}$であるから，成り立つ．

(II) $n=k$（kは正の整数）のとき成り立つ，つまり$a_k=\dfrac{k-1+c}{k+c}$であると仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\dfrac{k-1+c}{k+c}}$$

$$=\frac{k+c}{2(k+c)-(k-1+c)}=\frac{k+c}{k+1+c}$$

となるから，$n=k+1$のときも成り立つ．

したがって，(I)（II）より，すべての自然数nについて，

$$a_n=\frac{n-1+c}{n+c} \qquad \cdots(答)$$

(3)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=\frac{\dfrac{n+c}{n+1+c}}{\dfrac{n-1+c}{n+c}}-1$$

$$=\frac{(n+c)^2}{(n+1+c)(n-1+c)}-1$$

$$=\frac{(n+c)^2-\left\{(n+c)^2-1\right\}}{(n+1+c)(n-1+c)}$$

$$=\frac{1}{(n+1+c)(n-1+c)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+1+c}\right)$$

これを用いると，

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+1+c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{\left(\frac{1}{n-1+c}+\frac{1}{n+c}\right)-\left(\frac{1}{n+c}+\frac{1}{n+1+c}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c}\right)-\left(\frac{1}{N+c}+\frac{1}{N+1+c}\right)\right\}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c}\right)-\left(\frac{1}{N+c}+\frac{1}{N+1+c}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c}\right)=\frac{2c+1}{2c(c+1)}$$ …（答）

〔6〕

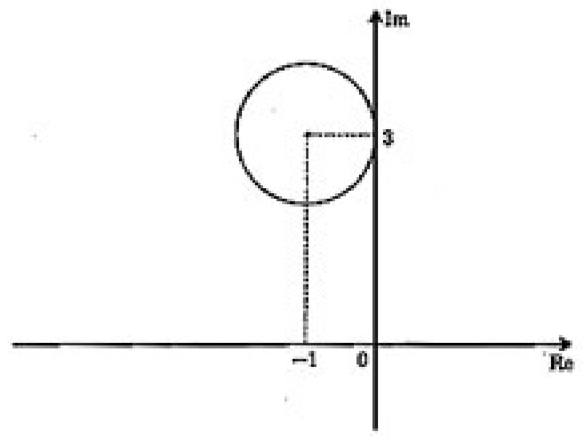
(1) $z\bar{z}+(1+3i)z+(1-3i)\bar{z}+9=0$ は,

$$\{z+(1-3i)\}\{\bar{z}+(1+3i)\}=(1-3i)(1+3i)-9$$

$$\therefore \quad |z+(1-3i)|^2=1$$

$$\therefore \quad |z+(1-3i)|=1$$

と変形できるから，C は点 $-1+3i$ を中心とする半径 1 の円であり，これを描くと右図のようになる.



(2) α，β はともに実数であるから実軸上にあり,

$$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|=2$$

であるから，△PAB の面積 S は，w の虚部を y とすると,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot|y|=|y|$$

である.

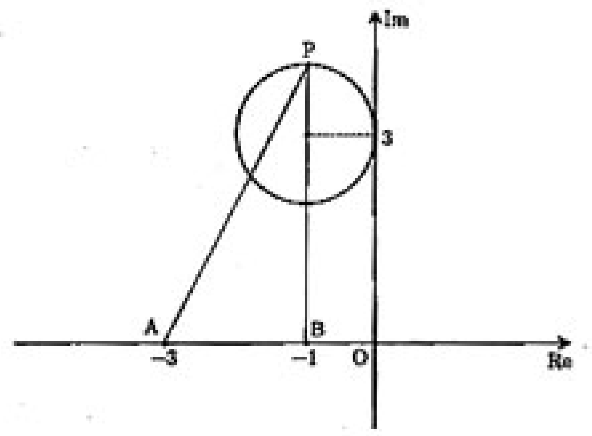
よって，P が C 上を動くとき，$y>0$ であることより，S が最大となるのは y が最大，すなわち,

$$w=-1+4i \qquad \cdots\cdots(答)$$

のときである．このとき,

$$\alpha=(-1+4i)+(-1-4i)-1=-3$$

$$\beta=(-1+4i)+(-1-4i)+1=-1$$



であるから，△PAB は $\angle\mathrm{PBA}=90^\circ$ の直角三角形であり，PA が△PAB の外接円の直径であるから，△PAB の外接円の中心と半径は，それぞれ,

$$中心：\frac{w+\alpha}{2}=-2+2i,\quad 半径：\frac{1}{2}|w-\alpha|=\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.