[I]

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ ……①

$\alpha+\beta+\gamma=0$ ……②

(1) A(α), B(β), C(γ) とおく. ここで, $\alpha=\beta$ とすると, ② より $\gamma=-2\alpha$ となり,

$$|\gamma|=2|\alpha|=2 \quad (\because \ ①)$$

となるから, ① に反する. したがって, $\alpha \neq \beta$ であり, 点 A, B は異なる. 同様に B と C, C と A も異なる.

① より, △ABC の外心は原点 O(0) である. また, ② より, $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0$ となるから △ABC の重心も O であり, △ABC の外心と重心は一致する. したがって, △ABC, すなわち, α, β, γ の表す複素数平面上の点は正三角形をなす.

(注)

△ABC の外心と重心がともに点 O であるとき, △ABC が正三角形であることは次のように示すことができる.

BC の中点を M とおくと O が △ABC の重心であることから直線 AO は M を通る. また, O が外心であるから OM⊥BC すなわち, AM⊥BC であるので, AB = AC が成り立つ. 同様に, BC = BA が成り立つから △ABC は正三角形である.

(2) ① より正三角形 ABC の外心が点 O(0) であるから, $\omega=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ とおくと,

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}=\omega \ \cdots\cdots ③ \quad \text{または} \quad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}=\overline{\omega} \ \cdots\cdots ④$$

であり, いずれにしても

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma}=1$$

同様に, $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}=\dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}=1$

である.

したがって,

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots (答)$$

である.

(3)　$n=3m+r$ (m は 0 以上の整数, $r=1, 2$) とおく. このとき, $1+\omega+\omega^2=0$, $\omega^3=1$ であるから,

$$1+\omega^r+\omega^{2r}=0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である.

③ のとき,

$$\beta=\alpha\omega, \quad \gamma=\beta\omega=\alpha\omega^2$$

であるから,

$$\begin{aligned}\alpha^n+\beta^n+\gamma^n &= \alpha^n+(\alpha\omega)^n+(\alpha\omega^2)^n \\ &= \alpha^n(1+\omega^n+\omega^{2n}) \\ &= \alpha^n\{1+\omega^{3m+r}+\omega^{2(3m+r)}\} \\ &= \alpha^n(1+\omega^r+\omega^{2r}) \quad (\because \ \omega^3=1) \\ &= 0 \quad (\because \ ⑤)\end{aligned}$$

である.

④ のときは,

$$\beta=\alpha\overline{\omega}, \quad \gamma=\beta\overline{\omega}=\alpha(\overline{\omega})^2$$

であるから, 同様にして,

$$\begin{aligned}\alpha^n+\beta^n+\gamma^n &= \alpha^n\{1+(\overline{\omega})^r+(\overline{\omega})^{2r}\} \\ &= \alpha^n\,\overline{(1+\omega^r+\omega^{2r})} \\ &= 0 \quad (\because \ ⑤)\end{aligned}$$

である.

以上より,

$$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=0 \qquad \cdots\cdots (答)$$

(注)

(1) は次のように示すこともできる.

α, β, γ の少なくとも 2 つが一致するとすれば, ①, ② に反するから α, β, γ はどの 2 つも異なる. (解答参照)

次に,

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|^2-|\beta-\gamma|^2 &= (\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-(\beta-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\gamma}) \\ &= (\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta})-(\beta\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}-\gamma\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma}) \\ &= (1-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}+1)-(1-\beta\overline{\gamma}-\gamma\overline{\beta}+1) \quad (\because \ ①) \\ &= \overline{\beta}(-\alpha+\gamma)-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\overline{\alpha}+\overline{\gamma})(-\alpha+\gamma)+(\alpha+\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma}) \quad (\because \ ②) \\
&= (1-\overline{\alpha}\gamma+\alpha\overline{\gamma}-1)+(1-\alpha\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}-1) \quad (\because \ ①) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad |\alpha-\beta| = |\beta-\gamma|$$

同様に,

$$|\beta-\gamma| = |\gamma-\alpha|$$

も成り立つから,

$$|\alpha-\beta| = |\beta-\gamma| = |\gamma-\alpha|$$

したがって, α, β, γ を表す複素数平面上の点が正三角形をなす.

[II]

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のとき, $y'=x$ であるから, 点 P における C の接線の方程式は,

$$y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore\quad y=tx-\frac{1}{2}t^2 \qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$t\fallingdotseq 0$ のとき, 点 P における法線の傾きは, $-\dfrac{1}{t}$ であるから, 法線の方程式は,

$$y=-\frac{1}{t}(x-t)+\frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{t}x+\frac{1}{2}t^2+1$$

これを,

$$x+ty=\frac{1}{2}t^3+t$$

とすると, $t=0$ でも成り立つ.

したがって, 求める方程式は,

$$x+ty=\frac{1}{2}t^3+t \qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　点 $\mathrm{Q}(X,Y)$ は点 P における C の法線上の $Y\geqq\dfrac{1}{2}t^2$ の部分にあるから,

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=u(-t,1)\ (u\geqq 0)$ とおけ, この y 成分を考えると, $Y=\dfrac{1}{2}t^2+u$ である.

一方, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=d$ であるから,

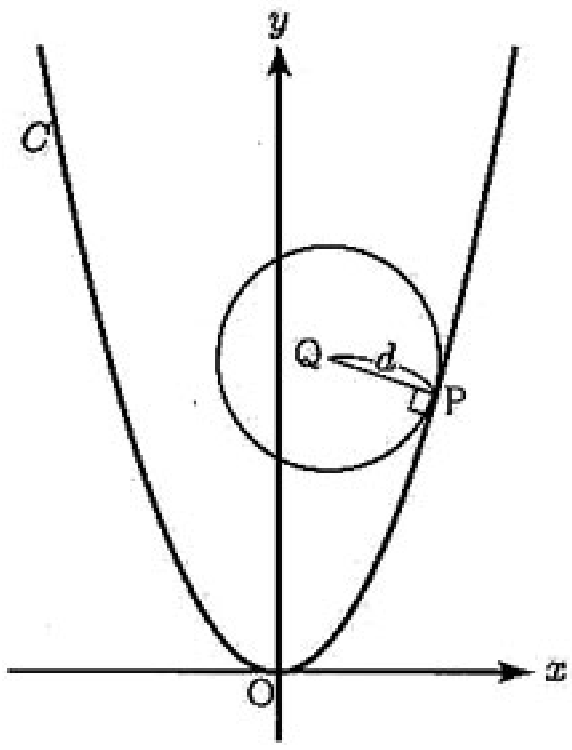
$$u^2(t^2+1)=d^2$$

$$\therefore\quad u=\frac{d}{\sqrt{t^2+1}} \qquad (\because\quad u\geqq 0)$$

したがって,

$$Y=\frac{1}{2}t^2+\frac{d}{\sqrt{t^2+1}} \qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である.



(4) $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{d}{\sqrt{t^2+1}}$ とおくと,

$$f'(t)=t-\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left\{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}-d\right\}$$

となる.

(i) $0<d\leqq 1$ のとき

すべての実数 t に対し, $(t^2+1)^{\frac{3}{2}}-d\geqq 0$ (等号は $d=1$, $t=0$ のみで成立) であるから,

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	d	$\nearrow$

となる. よって, $f(t)$ は $t=0$ で極小値 d をとる.

(ii) $d>1$ のとき

$\alpha=\sqrt{d^{\frac{2}{3}}-1}$ とおくと,

t	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

となるから, $f(t)$ は $t=\pm\alpha$ で極小値

$$f(\pm\alpha)=\frac{1}{2}(d^{\frac{2}{3}}-1)+\frac{d}{d^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\frac{3}{2}d^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}$$

をとる.

以上より,

$$(Y\text{ の極小値})=\begin{cases} d & (0<d\leqq 1) \\ \dfrac{3}{2}d^{\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{2} & (d>1)\end{cases} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

[III]

$t=0$ において容器は空であると仮定する.

(1) 時刻 t における水量の関係式は

$$vt=\int_0^{h(t)}\pi\{g(y)\}^2dy \quad \cdots\cdots(*)$$

両辺を t で微分して

$$v=\pi\{g(h(t))\}^2h'(t)$$

を得て, $h'(t)=$ (定数) ならば $g(y)=$ (定数) である.

(2) $g(y)=e^y$ ならば $(*)$ より

$$vt=\frac{\pi}{2}(e^{2h(t)}-1)$$

したがって

$$h(t)=\log\sqrt{\frac{2}{\pi}vt+1} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

［Ⅳ］番号kの人がl巡目$(l=1,2,3,\cdots)$に初めて赤玉を引く確率は，

$$(\beta^n)^{l-1}\beta^{k-1}\alpha$$

であるから，$\alpha=1-\beta$ に注意すると，

$$p_k^{(n)}=\sum_{l=1}^{\infty}\left\{(\beta^n)^{l-1}\beta^{k-1}\alpha\right\}=\frac{\beta^{k-1}(1-\beta)}{1-\beta^n}\quad(\because\ 0<\beta^n<1)\quad\cdots①$$

と表される．

(1) ①に$n=2, k=1$を代入して，

$$p_1^{(2)}=\frac{1-\beta}{1-\beta^2}=\frac{1}{1+\beta}\qquad\cdots(\text{答})$$

(2) ①より，

$$p_{k+1}^{(n)}=\frac{\beta^k(1-\beta)}{1-\beta^n}=\beta p_k^{(n)}\qquad\therefore\ \frac{p_{k+1}^{(n)}}{p_k^{(n)}}=\beta\qquad\cdots(\text{答})$$

(3) $E_m=\sum_{k=1}^{m}kq_k\ \ (m=1,2,3,\cdots)$とおく．

$$q_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^{k-1}(1-\beta)}{1-\beta^n}=\beta^{k-1}(1-\beta)\quad(\because\ 0<\beta<1)$$

である．以下では，mは十分大きな自然数として考える．

$$\begin{aligned}E_m&=\sum_{k=1}^{m}k\beta^{k-1}(1-\beta)\\&=\sum_{k=1}^{m}k\beta^{k-1}-\sum_{k=1}^{m}k\beta^{k}\\&=\sum_{k=1}^{m}k\beta^{k-1}-\sum_{k=2}^{m+1}(k-1)\beta^{k-1}\\&=1+\sum_{k=2}^{m}\left\{k\beta^{k-1}-(k-1)\beta^{k-1}\right\}-m\beta^m\\&=\sum_{k=1}^{m}\beta^{k-1}-m\beta^m\end{aligned}$$

$0<\beta<1$より，$\lim_{m\to\infty}m\beta^m=0$であるから，

$$E=\lim_{m\to\infty}E_m=\frac{1}{1-\beta}-0=\frac{1}{\alpha}$$

仮定より$a\geq b$であるから，$\frac{1}{2}\leq\alpha<1$．ゆえに，$\alpha=\frac{1}{2}$のとき，Eは最大となる．

このとき，

$$a=b=\frac{a+b}{2}=1010\qquad\cdots(\text{答})$$

(注意)

xを１ではない実数の変数とするとき，

$$\sum_{k=1}^{m} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{d}{dx}x^k\right) = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{m} x^k = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\right) = \frac{1-(m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2}$$

が成り立つことを利用して，

$$E_m = \sum_{k=1}^{m} k\beta^{k-1}(1-\beta) = \frac{1-(m+1)\beta^m + m\beta^{m+1}}{(1-\beta)^2}(1-\beta)$$

$$= \frac{1-(m+1)\beta^m + m\beta^{m+1}}{1-\beta}$$

$$\to \frac{1}{1-\beta} \ (m \to \infty) \quad (\because \ 0 < \beta < 1)$$

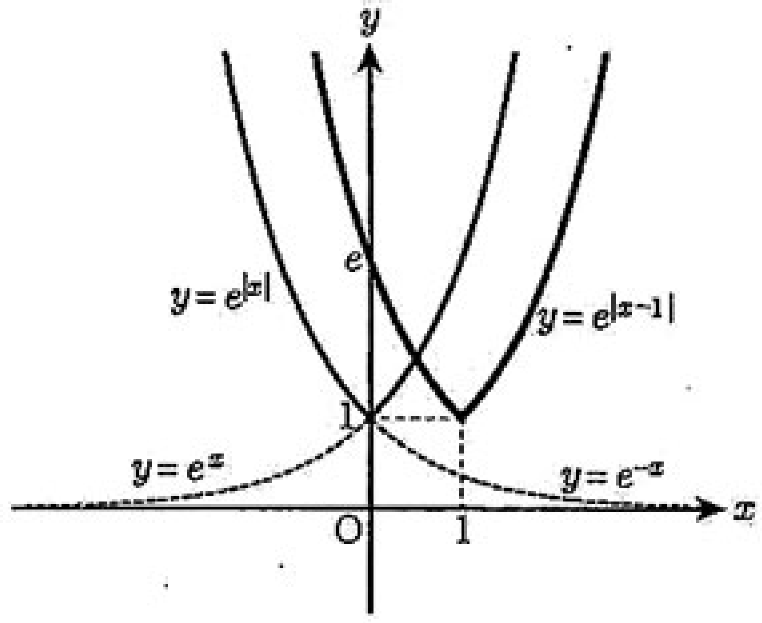
$$= \frac{1}{\alpha} \quad (\because \ \alpha + \beta = 1)$$

$$\therefore E = \frac{1}{\alpha}$$

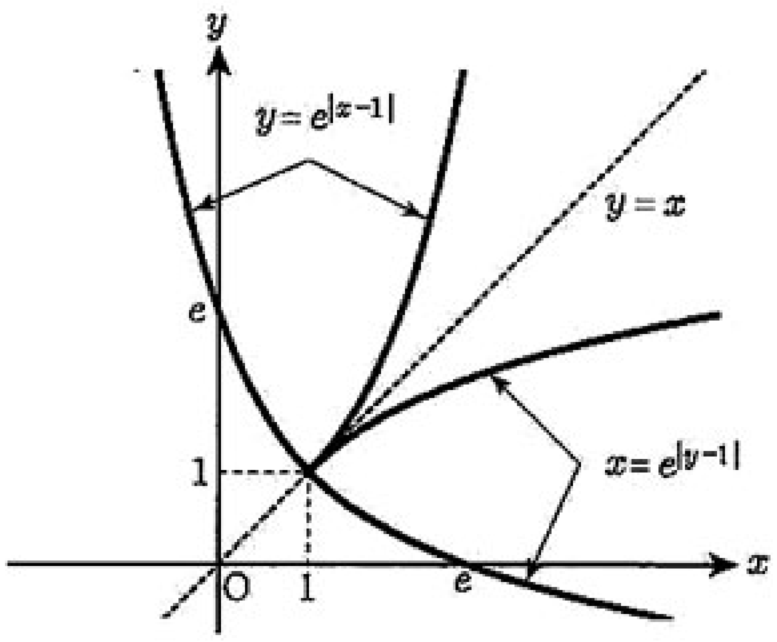
としてもよい．

[V]

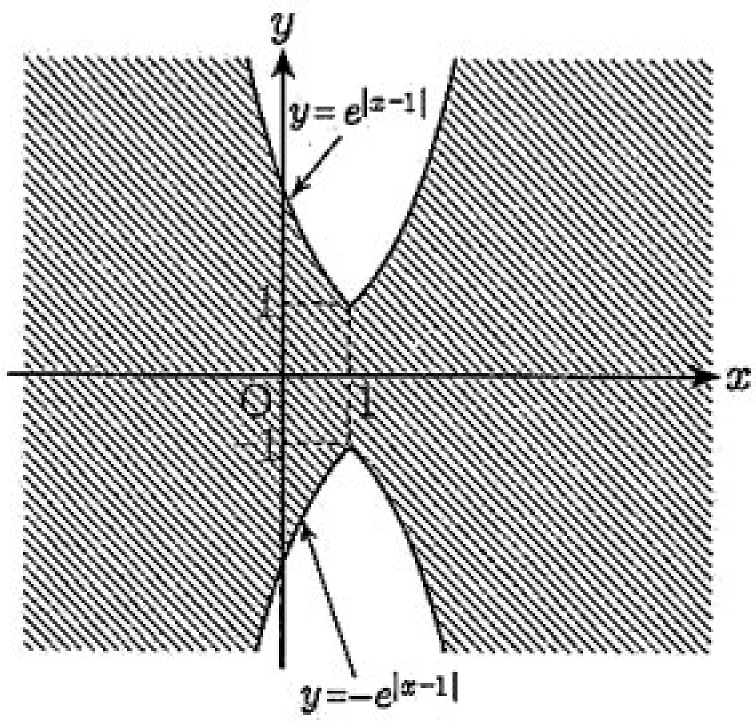
(1) $y=e^{|x-1|}$ のグラフは $y=e^{|x|}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動した曲線である. したがって, 次の図のようになる.



関数 $x=e^{|y-1|}$ のグラフは, $y=e^{|x-1|}$ のグラフを直線 $y=x$ に関して折り返した曲線である. 関数 $y=e^{x-1}$ は, $y'=e^{x-1}$ であるから, $x=1$ における グラフの接線の傾きが 1 であることに注意して, $y=e^{|x-1|}$ と $x=e^{|y-1|}$ の グラフを描くと次の図の実線のようになる。



(2) $|y| \leqq e^{|x-1|} \iff -e^{|x-1|} \leqq y \leqq e^{|x-1|}$ であるから, $|y| \leqq e^{|x-1|}$ は次の図の斜線部を表す. ただし境界を含む.



同様に, $|y| \leqq e^{|x+1|}$, $|x| \leqq e^{|y-1|}$, $|x| \leqq e^{|y+1|}$ を考え, 4 つの領域の共通部分 D を図示すると次のようになる. ただし, 境界を含む.