$\boxed{1}$ 【解答】(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{12}$ (2) 28 (3) $\theta=\dfrac{\pi}{505}$ (4) $-\dfrac{1}{15}$

(1) $\displaystyle\int_0^x (x-t)^{m-1}f(t)dt=\{f(x)\}^m$……①

$\displaystyle\int_0^x (x-t)^{m-1}f(t)dt$ は x の $m+n$ 次以下の多項式であり，$\{f(x)\}^m$ は mn 次の多項式である．①より，

$mn\leqq m+n$ $\quad\therefore\quad (m-1)(n-1)\leqq 1$……②

である．m, n は正の整数であり，$m=1$ のとき，①の左辺は x の $n+1$ 次式，右辺は x の n 次式となり不合理である．よって，$m\neq 1$ である．また，$n=1$ とすると，$f(x)=px+q$ $(p\neq 0)$ とおけ，このとき，

$$\int_0^x (x-t)^{m-1}f(t)dt=\int_0^x (x-t)^{m-1}(pt+q)dt=(-1)^{m-1}\int_0^x (t-x)^{m-1}\{p(t-x)+px+q\}dt$$

$$=(-1)^{m-1}\int_0^x \{p(t-x)^m+(px+q)(t-x)^{m-1}\}dt$$

$$=(-1)^{m-1}\left[\frac{p(t-x)^{m+1}}{m+1}+\frac{(px+q)(t-x)^m}{m}\right]_0^x$$

$$=-(-1)^{m-1}\left\{\frac{p(-x)^{m+1}}{m+1}+\frac{(px+q)(-x)^m}{m}\right\}$$

$$=-\frac{px^{m+1}}{m+1}+\frac{(px+q)x^m}{m}=p\left(-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m}\right)x^{m+1}+\frac{q}{m}x^m$$

となる．$-\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m}\neq 0$ であり，①の左辺は x の $m+1$ 次式，右辺は x の m 次式となり不合理である．

したがって，②が成り立つのは $m=n=2$ のときであり，$f(x)$ は x の 2 次式となる．

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおくと，①の左辺は，

$$\int_0^x (x-t)(at^2+bt+c)dt=\int_0^x \{cx+(bx-c)t+(ax-b)t^2-at^3\}dt$$

$$=cx^2+\frac{bx-c}{2}x^2+\frac{ax-b}{3}x^3-\frac{a}{4}x^4=\frac{a}{12}x^4+\frac{b}{6}x^3+\frac{c}{2}x^2$$

①の右辺は

$$(ax^2+bx+c)^2=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2$$

となる．よって，

$$a^2=\frac{a}{12},\ 2ab=\frac{b}{6},\ b^2+2ac=\frac{c}{2},\ 2bc=0,\ c^2=0$$

となり，$a\neq 0$ に注意すると，$a=\dfrac{1}{12}$, $b=0$, $c=0$ となるから，$f(x)=\dfrac{x^2}{12}$ である． ……(答)

(2) 条件(i), (ii)より, s, t を正の整数として,

$$d=a+3s\,,c=b+3t\cdots\cdots①$$

とおける.

以下, 合同式の法はすべて3とする. $c\equiv b\equiv 0$ または $c\equiv b\equiv 1$ とすると,

$$c^a\equiv b^d$$

となり, 条件(iii)に反する. よって, $c\equiv b\equiv 2\cdots\cdots②$となり,

$$c^a-b^d\equiv 2^a-2^{a+3s}$$

となる.

一方, $2^{n+2}=4\cdot 2^n\equiv 2^n$ であり, $2^1=2, 2^2=4\equiv 1$ であることから, $2^n(\ n=1,2,3,\cdots\ )$を3で割った余りは, 2, 1を周期2で繰り返す. よって, $c^a-b^d\equiv 2^a-2^{a+3s}\not\equiv 0$ となるのは,

a と $d=a+3s$ の偶奇が異なる……③

ときである.

条件(i), ①, ②, ③を満たす整数 a, b, c, d のうち, $a+b+c+d$ が最小となるものを求める.

$a=3$ のとき, 最小の (b,c,d) の組は, $(b,c,d)=(5,8,12)$ となり, $a+b+c+d=28$ となる.

$a=4$ のとき, 最小の (b,c,d) の組は, $(b,c,d)=(5,8,13)$ となり, $a+b+c+d=30>28$ となる.

$a\geqq 5$ のとき, $b\geqq 8$, $c\geqq 11$ となり, $d\geqq 12$ となるから, $a+b+c+d>28$ となる.

以上から, $(a,b,c,d)=(3,5,8,12)$ のとき, $a+b+c+d$ は最小となり, 最小値は28である. ……(答)

(3) すべての正の整数 n に対して,

$$a_n=\tan n\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つと推定される. これが正しいことを数学的帰納法を用いて示す.

$a_1=\tan\theta$ であるから, $n=1$ のとき(*)は成立する.

1以上のある n で, $a_n=\tan n\theta$ が成り立つと仮定すると, 条件(ii)より,

$$a_{n+1}=\frac{\tan\theta+\tan n\theta}{1-\tan n\theta\cdot\tan\theta}=\tan(\theta+n\theta)=\tan(n+1)\theta$$

となり, $n+1$ のときも(*)は成立する.

以上から, $a_n=\tan n\theta$ であり, $a_{2020}=0$ より,

$$\tan 2020\theta=0$$

となり, l を正の整数として,

$$2020\theta=l\pi \qquad \therefore \quad \theta=\frac{l\pi}{2020}\cdots\cdots①$$

となる. ただし, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より, $0<l<1010$ となる.

次に, ①のとき, $a_n=\dfrac{1}{\tan\theta}\cdots\cdots②$となる場合を考える.

$$a_n=\frac{1}{\tan\theta}\iff \tan n\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\iff n\theta=\frac{\pi}{2}-\theta+k\pi$$

$$\iff (n+1)\cdot\frac{l\pi}{2020}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\iff n=\frac{1010(2k+1)}{l}-1\cdots\cdots③$$

ただし，k は0以上の整数である．

$l=1$ のとき，③は $n=1010(2k+1)-1$ となり，②を満たす n が存在する．

$l=2$ のとき，③は $n=505(2k+1)-1$ となり，②を満たす n が存在する．

$l=3$ のとき，③は $n=\dfrac{1010(2k+1)}{3}-1$ となり，$k=1$ とすると②を満たす n が存在する．

$l=4$ のとき，③は $n=\dfrac{505(2k+1)}{2}-1$ となるが，$2k+1$ は奇数であるから，これを満たす整数 n は存在しない．

以上から，条件(i)，(ii)を満たす θ が最小となるのは $l=4$ のときであり，最小値は $\theta=\dfrac{\pi}{505}$ である．……(答)

(4)　面OABと面OACのなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ であることから，Oを原点とする座標空間において，面OABを xy 平面，面OACを xz 平面上におくことができる．さらにAを x 軸の正方向におく．$\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ として，$\overrightarrow{n_1}=(\cos\angle\mathrm{AOB},\sin\angle\mathrm{AOB},0)$，$\overrightarrow{n_2}=(\cos\angle\mathrm{AOC},0,\sin\angle\mathrm{AOC})$ ととれるから，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{5}$，$\cos\angle\mathrm{AOC}=-\dfrac{1}{3}$ より，

$$\cos\angle\mathrm{BOC}=\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\cos\angle\mathrm{AOB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOC}=-\frac{1}{15}$$ である．……(答)

$\boxed{2}$

(1) $g(x)=x \Longleftrightarrow 4x(1-x)=x$

$$\Longleftrightarrow x(3-4x)=0 \Longleftrightarrow x=0,\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) (*)より，$g^0(\alpha), g^1(\alpha), g^2(\alpha), \cdots$ はすべて $f(x)=x$ の解である．……(**)

$g^1(\alpha)=\beta$ とおく．(1)の結果から，$0<\alpha<\frac{1}{2}$ のとき $\alpha \neq \beta$ である．$f(x)=x$ は x の２次方程式であるから，解の個数は高々２個であり，(**)より，α，β は $f(x)=x$ の相異なる２つの実数解となる．よって，$g^n(\alpha)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ の値は α または β に等しく，$g^2(\alpha)=g(g^1(\alpha))=g(\beta)$ は，

(i) $g(\beta)=\alpha$　または　(ii) $g(\beta)=\beta$　を満たす．

(i)の場合

$$\begin{cases} g(\alpha)=\beta \\ g(\beta)=\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4\alpha(1-\alpha)=\beta \cdots\cdots① \\ 4\beta(1-\beta)=\alpha \cdots\cdots② \end{cases}$$

であるから，①－②より，

$$4(\alpha-\beta)-4(\alpha^2-\beta^2)=\beta-\alpha \Longleftrightarrow (\alpha-\beta)\{5-4(\alpha+\beta)\}=0$$

となり，$\alpha \neq \beta$ より，$\alpha+\beta=\frac{5}{4}$……③となる．また，①＋②より，

$$4(\alpha+\beta)-4(\alpha^2+\beta^2)=\alpha+\beta \Longleftrightarrow 4\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=3(\alpha+\beta)$$

③を代入して，$4\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^2-2\alpha\beta\right\}=3\cdot\frac{5}{4}$　$\therefore$　$\alpha\beta=\frac{5}{16}$……④　となる．

③，④より α，β は X の２次方程式　$X^2-\frac{5}{4}X+\frac{5}{16}=0$ の２解となり，$X=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ となることから，$0<\alpha<\frac{1}{2}$ に注意すると，$\alpha=\frac{5-\sqrt{5}}{8}, \beta=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ となる．

このとき，$g^1(\alpha)=\beta, g^2(\alpha)=g(\beta)=\alpha, g^3(\alpha)=g(\alpha)=\beta, \cdots$ となり，(*)は成立する．

(ii)の場合

$0<\alpha<\frac{1}{2}$ より，$\beta \neq 0$ であることに注意すると，(1)より，$\beta=\frac{3}{4}$ である．このとき，$g(\alpha)=\frac{3}{4}$ となり，$\alpha=\frac{1}{4},\frac{3}{4}$ となる．$\alpha \neq \beta$ より，$\alpha=\frac{1}{4}$ である．

$\alpha=\frac{1}{4}$，$\beta=\frac{3}{4}$ であるとき，$g^1(\alpha)=\beta, g^2(\alpha)=g(\beta)=\beta, \cdots, g^n(\alpha)=g(\beta)=\beta, \cdots$ となり，(*)は成立する．

一方，$f(x)-x=(x-\alpha)(x-\beta)$　$\therefore$　$f(x)=x^2-(\alpha+\beta-1)x+\alpha\beta$ であることから，(i)，(ii)より，

$$f(x)=x^2-\frac{1}{4}x+\frac{5}{16} \text{ または } f(x)=x^2+\frac{3}{16} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{3}$

(1)　$x_n = n$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）のとき，$1 \leqq k \leqq t$ である整数 k に対して，

$$m(k,t) = \frac{1}{t-k+1}\sum_{i=k}^{t} i = \frac{1}{t-k+1}\cdot\frac{t-k+1}{2}(k+t) = \frac{k+t}{2}$$

となる．よって，$1 \leqq k \leqq t$ であるすべての整数 k に対して，$\dfrac{k+t}{2} \geqq 40$ が成り立つ条件は，$\dfrac{1+t}{2} \geqq 40$ であり，$t \geqq 79$ である．したがって，$S(\{x_n\})$ の要素の個数は 22 個である．……(答)

(2)　$1 \leqq k \leqq l \leqq 100$ である整数 k，l が，条件(i)，(ii)を満たすとき，$k \leqq j \leqq l$ を満たすすべての j に対して，$m(k,j) < 40$ ……(*)となることを示す．

(Ⅰ)　$j = k$ のとき

$k \geqq 2$ のとき，条件(i)より，$1 \leqq s \leqq k-1$ であるすべての s に対し，$m(s, k-1) \geqq 40$ であるから，$m(k,k) = x_k \geqq 40$ とすると，$1 \leqq s \leqq k$ であるすべての s に対して $m(s,k) \geqq 40$ となり，条件(ii)に矛盾する．

$k=1$ のとき，$1 \notin S(\{x_n\})$ より，$m(1,1) = x_1 < 40$ となる．

以上から，$m(k,k) = x_k < 40$ となり，(*)は成立する．

(Ⅱ)　$j = k, k+1, \cdots, K$（K は $k \leqq K \leqq l-1$ を満たす整数)のとき，$m(k,j) < 40$ が成立すると仮定する．

条件(ii)より，$K+1 \notin S(\{x_n\})$ であるから，$1 \leqq N \leqq K+1$，$m(N, K+1) < 40$ をみたす整数 N が存在する．このような N がすべて k より小さいとすると，$m(k, K+1) \geqq 40$，$m(k+1, K+1) \geqq 40$，……，$m(K+1, K+1) \geqq 40$ となり，条件(i)と合わせ，$m(s, K+1) \geqq 40$　$(s = 1, 2, 3, \cdots, K+1)$　が成立する．つまり，$K+1 \in S(\{x_n\})$ となり，これは不合理である．したがって，N の中には，k 以上のものがありそれを N' とする．

$N' = k$ のとき，$m(k, K+1) < 40$ となる．

$N' \geqq k+1$ のとき，$k \leqq N'-1 \leqq K$ であるから，仮定より，$m(k, N'-1) < 40$ であり，$m(N', K+1) < 40$ であることと合わせて，$m(k, K+1) < 40$ が成り立つ．

したがって，$j = K+1$ のときも(*)は成立する．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，$k \leqq j \leqq l$ を満たすすべての j に対して，$m(k,j) < 40$ が成り立つ．特に，$j = l$ として，$m(k,l) < 40$ が成り立つ．

（証明終わり）

(3)　$m(1,100) \geqq 50$ より $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i \geqq 5000$ であり，すべての正の整数 n に対して $0 \leqq x_n \leqq 100$ を満たす数列 $\{x_n\}$ の一つとして，$x_1 = x_2 = \cdots = x_{50} = 0$，$x_{51} = x_{52} = \cdots = x_{100} = 100$ であるものを考える．

$1 \leqq t \leqq 50$ のとき，$1 \leqq k \leqq t$ を満たすすべての k に対して，$m(k,t) = 0 < 40$ より，$t \notin S(\{x_n\})$ となる．

$51 \leqq t \leqq 100$ のとき，$m(k,t) = \dfrac{1}{t-k+1}\displaystyle\sum_{i=k}^{t} x_i \geqq 40$ とすると，$\dfrac{100(t-50)}{t-k+1} \geqq 40$ であり，これが，$1 \leqq k \leqq t$ を満たすすべての k に対して成り立つ条件は，

$$\frac{100(t-50)}{t-1+1} \geqq 40 \qquad \therefore \quad t \geqq 83 + \frac{1}{3}$$

となり，$t \in S(\{x_n\})$ を満たす t は 17 個となる．

一方，$t \in S(\{x_n\})$ を満たす t が 16 個以下であるとする．$x_1 \sim x_{100}$ からこれら x_t を除くと 84 個以上の項か

らなる集合 A ができる．(2)より，A の要素の平均が 40 未満となる．このとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i < 3360 + 100 \times 16 = 4960$

となり，$\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i \geqq 5000$ であることに矛盾する．

以上から，$S(\{x_n\})$ の要素の個数の最小値は 17 である．　　……(答)