2020年度 早稲田大学 社会科学部 数学

1

[解答]

(1) $$f(x)=x^3-3ax^2+12x+b$$

のとき，

$$f'(x)=3x^2-6ax+12$$

となる．

$f(x)$ が極大値および極小値をとるためには，$f'(x)$ が2次関数であることに注意すると，

「2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ」 ……(*)

ことが必要十分である．

(*) の条件は，$f'(x)=0$ の (判別式)>0 より，

$(-3a)^2-3\cdot 12>0$

$\therefore a^2-4>0$

$\therefore (a+2)(a-2)>0$

すなわち，

$a<-2$ または $2<a$ ……①(答)

である．

(2) 整式 $x^3-3ax^2+12x+b$ を整式 $3x^2-6ax+12$ で割り算すると，

商が $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}a$

余りが $(8-2a^2)x+4a+b$ ……(答)

となる．

(3) (2) より，

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a\right)+(8-2a^2)x+4a+b \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

ここで，(*) のもとでは $x=\alpha$ と $x=\beta$ が2次方程式 $f'(x)=0$ の2解であるから，

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

であり，解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=2a$ ……③

である．

よって，②，③ より，

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=(8-2a^2)(\alpha+\beta)+2(4a+b)\\ &=(8-2a^2)\cdot 2a+8a+2b\\ &=-4a^3+24a+2b \end{aligned}$$ ……④(答)

と表される．

(4)　$f(\alpha)+f(\beta)=0$ となるのは，① かつ ④ より，

$$b=2a^3-12a \quad \text{かつ} \quad (a<-2 \text{ または } 2<a) \qquad \cdots\cdots ◎$$

が成立することである．

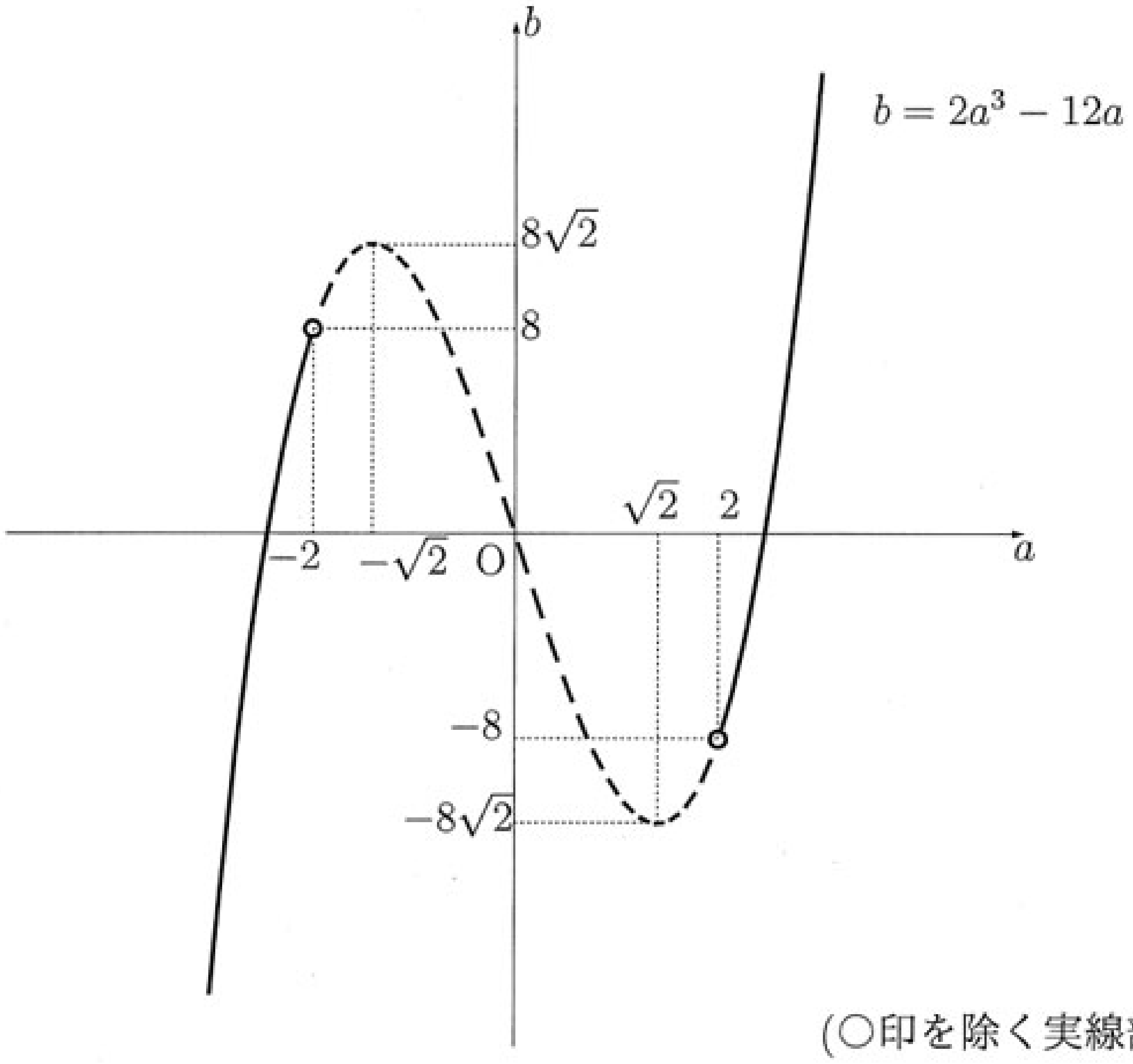
ここで，

$$\frac{db}{da}=6a^2-12$$
$$=6(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$\frac{db}{da}$	$+$	0	$-$	0	$+$
b	$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8\sqrt{2}$	$\nearrow$

より，$b=2a^3-12a$ の増減について右表を得る．

よって，◎となる実数の組 (a,b) の集合は下図のようになる．



(○印を除く実線部分)

2

[解答]

(1)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n}(x-k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x^2-2kx+k^2) \\
&= nx^2 - 2x\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}k^2 \\
&= nx^2 - 2x\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= nx^2 - n(n+1)x + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)^2}{4} + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}n(n+1)\{-3(n+1)+2(2n+1)\} \\
&= n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}n(n+1)(n-1)
\end{aligned}
$$

となるので，$f(x)$ は，

$$x = \frac{n+1}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

のとき，最小値

$$f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{12}n(n+1)(n-1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる．

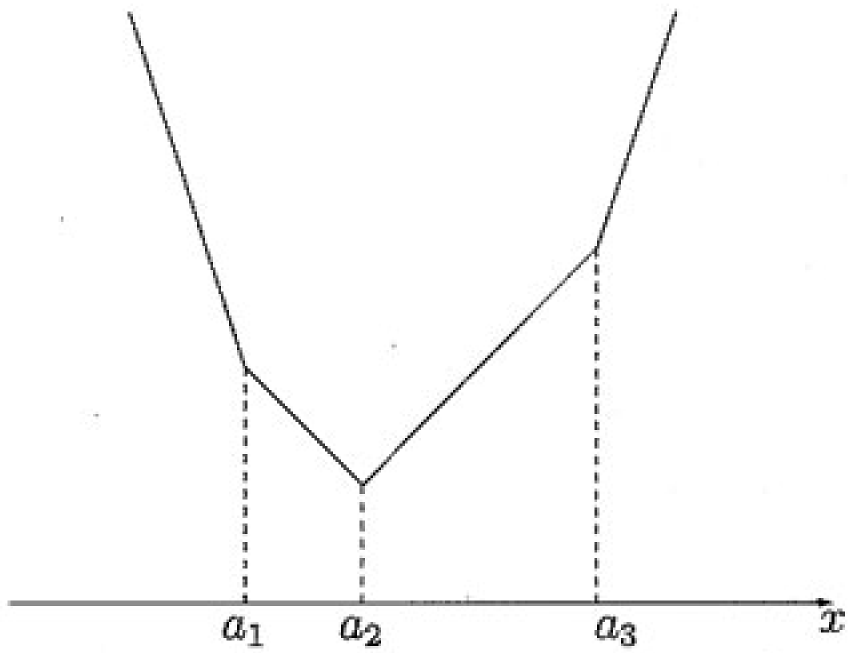
(2) $a_1 < a_2 < a_3$ のもとでは，

$$
g(x) = \begin{cases}
-3x + a_1 + a_2 + a_3 & (x \leqq a_1 \text{のとき}) \\
-x - a_1 + a_2 + a_3 & (a_1 \leqq x \leqq a_2 \text{のとき}) \\
x - a_1 - a_2 + a_3 & (a_2 \leqq x \leqq a_3 \text{のとき}) \\
3x - a_1 - a_2 - a_3 & (a_3 \leqq x \text{のとき})
\end{cases}
$$

となるので $y = g(x)$ のグラフは，

$x \leqq a_1$ のとき，傾き -3,
$a_1 \leqq x \leqq a_2$ のとき，傾き -1,
$a_2 \leqq x \leqq a_3$ のとき，傾き 1,
$a_3 \leqq x$ のとき，傾き 3,

の次図のような連続な折れ線である．



よって，$g(x)$ は，

$$x = a_2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のとき，最小値

$$f(a_2) = (a_2 - a_1) + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_2)$$
$$= a_3 - a_1 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(別解)

$a_1 < a_2 < a_3$ のもとでは，三角 (形) 不等式と絶対値が 0 以上であることにより，

$$g(x) = |x - a_1| + |a_3 - x| + |x - a_2|$$
$$\geqq |(x - a_1) + (a_3 - x)| \qquad \cdots\cdots ①$$
$$= |a_3 - a_1|$$
$$= a_3 - a_1$$

が成立する．

①の等号は，

$$a_1 \leqq x \leqq a_3 \quad \text{かつ} \quad x = a_2$$

すなわち，

$$x = a_2$$

のときに成立する．

よって，$g(x)$ は，

$$x = a_2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときに，最小値

$$a_3 - a_1 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(3) $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1} |x - 2^k|$ について，

$$2 < 2^2 < 2^3 < \cdots\cdots < 2^{m+1} < \cdots\cdots < 2^{2m} < 2^{2m+1} \qquad \cdots\cdots(*)$$

であるから，(2) と同様に考察することにより，$h(x)$ は，

$$x = 2^{m+1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

のとき，最小値

$$
\begin{aligned}
h\left(2^{m+1}\right) &= \sum_{k=1}^{2m+1} \left|2^{m+1} - 2^k\right| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(2^{m+1} - 2^k\right) + 0 + \sum_{k=m+2}^{2m+1} \left(2^k - 2^{m+1}\right) \\
&= m \cdot 2^{m+1} - \sum_{k=1}^{m} 2^k + \sum_{k=m+2}^{2m+1} 2^k - m \cdot 2^{m+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{m} 2^k + 2^{m+1} \sum_{k=1}^{m} 2^k \\
&= \left(2^{m+1} - 1\right) \sum_{k=1}^{m} 2^k \\
&= \left(2^{m+1} - 1\right) \cdot 2 \cdot \frac{2^m - 1}{2 - 1} \\
&= (2^{m+1} - 1)(2^{m+1} - 2) \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

をとる．

(別解)

(*) のもとでは，三角 (形) 不等式と絶対値が 0 以上であることにより，

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \sum_{k=1}^{m} \left|x - 2^k\right| + \sum_{k=m+2}^{2m+1} \left|x - 2^k\right| + \left|x - 2^{m+1}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left|x - 2^k\right| + \sum_{k=1}^{m} \left|x - 2^{k+(m+1)}\right| + \left|x - 2^{m+1}\right| \\
&\geqq \sum_{k=1}^{m} \left|\left(x - 2^k\right) + \left(2^{k+(m+1)} - x\right)\right| \qquad \cdots\cdots ② \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(2^{k+(m+1)} - 2^k\right) \\
&= \left(2^{m+1} - 1\right) \sum_{k=1}^{m} 2^k \\
&= \left(2^{m+1} - 1\right) \cdot 2 \cdot \frac{2^m - 1}{2 - 1} \\
&= (2^{m+1} - 1)(2^{m+1} - 2)
\end{aligned}
$$

が成立する．

② の等号は，

$$2^m \leqq x \leqq 2^{m+2} \quad かつ \quad x = 2^{m+1}$$

すなわち，

$$x = 2^{m+1}$$

のときに成立する．

よって，$h(x)$ は，

$$x = 2^{m+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときに，最小値

$$(2^{m+1}-1)(2^{m+1}-2) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

3

[解答]

2円C_kとC_{k+1} $(k=1,2,3,4)$ の各中心間距離は,

$$P_1P_2=\sqrt{\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}-(-\sqrt{5})\right\}^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$P_2P_3=\sqrt{\left\{0-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^2+\left\{0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2}=\sqrt{2}$$

$$P_3P_4=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$P_4P_5=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left\{0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2}=\sqrt{2}$$

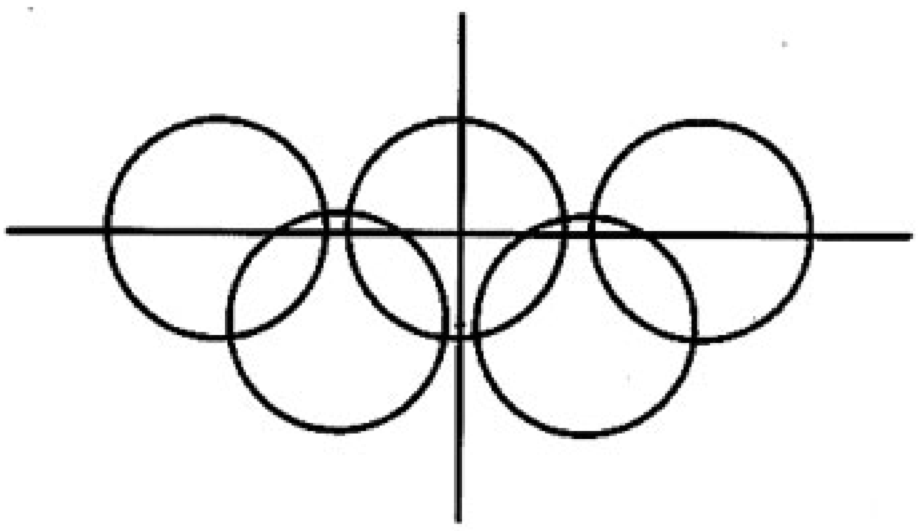
であり，いずれも2円C_kとC_{k+1}の半径の和2よりも小さいので,

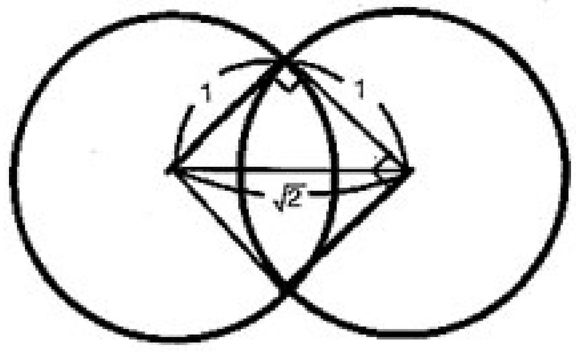
「C_kとC_{k+1}は異なる2点で交わっている」 ………………①

また，このとき下図のように

「2交点から中心を見込む角が$\dfrac{\pi}{2}$」 ………………②

であることにも注意する.





(1) 2円C_kとC_{k+1}に囲まれる共通部分の面積は，①，②より,

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1^1\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$$

であるから，求める面積は，5個の円の面積の和から重複する4カ所の共通部分の面積を除いて,

$$5\cdot\pi\cdot 1^2-4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=3\pi+4 \qquad \text{………………(答)}$$

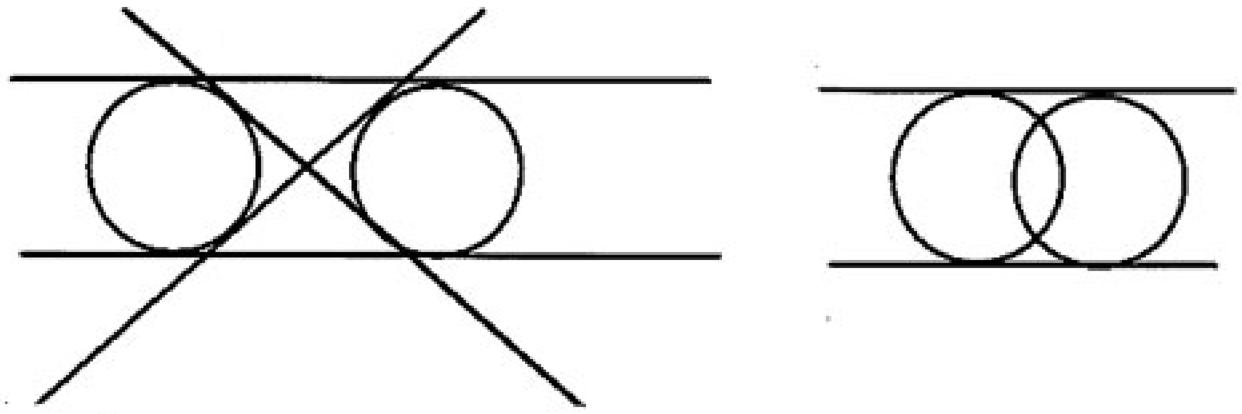
である.

(2) 一般に，2円の共通接線の本数は,

・2円が異なる2点で交わるときは，共通外接線2本

・2円が互いの外部にあるときは，共通外接線2本と共通内接線2本の計4本

である.



このことと①より，図形全体のy軸に関する対称性にも注意して，まず，

・C_1とC_2，C_2とC_3の共通接線はそれぞれ２本ずつ

・C_1とC_3，C_1とC_4の共通接線はそれぞれ４本ずつ

・C_2とC_4の共通接線は４本

である．

さらに，

・C_1とC_3，C_1とC_5，C_3とC_5のそれぞれの共通外接線２本($y=\pm 1$)は重複するので，求める本数は，

$2(2\cdot 2+4\cdot 3)-2\cdot 2=28$ （本） ………………(答)

である．

(3) ３つ以上の円と外接する円の半径は，図形全体のy軸に関する対称性に注意すると，

・C_1とC_2とC_3の３つに外接する円D_1の半径R_1

・C_1とC_2とC_5の３つに外接する円D_2の半径R_2

がすべてである．

２円が外接する条件は，(中心間距離)＝(半径の和)であることに注意する．

（i） R_1については，D_1の中心Q_1がP_1P_3の垂直二等分線上ゆえ$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, a\right)$とおけて，

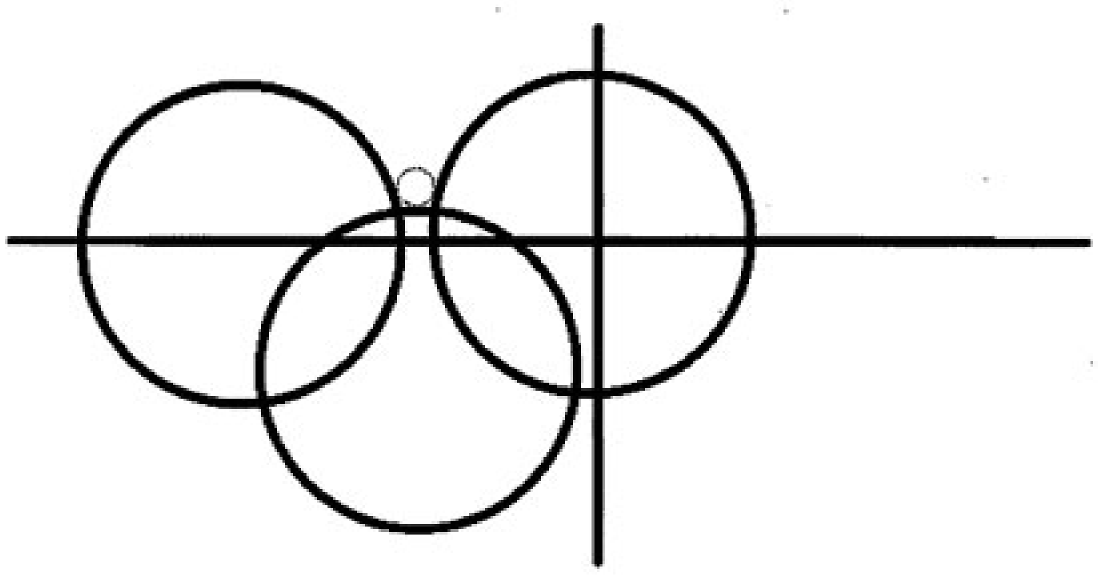
$Q_1P_2=Q_1P_3$より，

$$\left\{a-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2=\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+a^2 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

よって，

$$R_1=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+a^2}-1=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$$

である．



（ⅱ） R_2 については，D_2 の中心 Q_2 が $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_5$ の垂直二等分線上ゆえ $(0\,,b)$ とおけて，

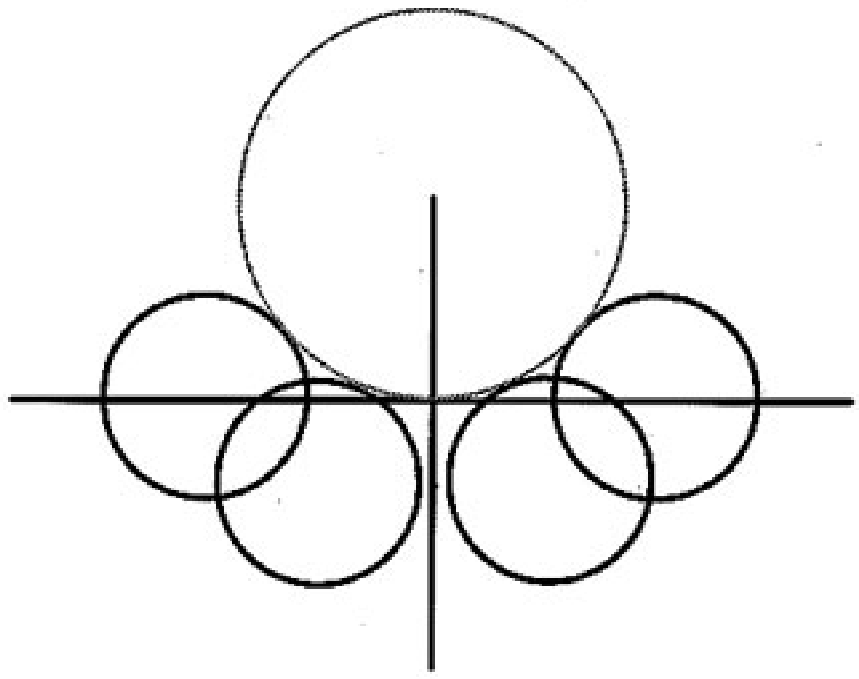
$\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_1=\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2$ より，

$$\left\{0-(-\sqrt{5})\right\}^2+(b-0)^2=\left\{0-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^2+\left\{b-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2 \qquad \therefore\ b=\sqrt{3}$$

よって，

$$R_2=\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2+b^2}-1=2\sqrt{2}-1$$

である．



以上から，求める半径は，

$$\frac{2}{\sqrt{3}}-1\ \text{と}\ 2\sqrt{2}-1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

がすべてである．