2021年度 一橋大学 前期 数学

$\boxed{1}$　1000 以下の正の整数の集合を全体集合 U とし，$P=\{n\in U\,|\,n$ は素数$\}$と定める．

以下，集合 X の要素の個数を $n(X)$と表すこととする．$n(P)+n(\overline{P})=n(U)=1000$ より，

$$n(P)\leqq 250 \Leftrightarrow n(\overline{P})\geqq 750 \quad \cdots(*)$$

であるから，U の要素のうち素数でないものの個数が 750 以上であることを示す．

$$A=\{n\in U\,|\,n \text{ は } 2 \text{ の倍数}\},\quad B=\{n\in U\,|\,n \text{ は } 3 \text{ の倍数}\},\quad C=\{n\in U\,|\,n \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$$

とし，$[x]$を x 以下の最大の整数を表すものとすると，

$$n(A)=\left[\frac{1000}{2}\right]=500,\quad n(B)=\left[\frac{1000}{3}\right]=333,\quad n(C)=\left[\frac{1000}{5}\right]=200$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{1000}{6}\right]=166,\quad n(B\cap C)=\left[\frac{1000}{15}\right]=66,\quad n(C\cap A)=\left[\frac{1000}{10}\right]=100,\quad n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{1000}{30}\right]=33$$

であるから，

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\&=500+333+200-166-66-100+33=734\end{aligned}$$

となる．2，3，5 は素数であるから，U の要素のうち 2 または 3 または 5 の倍数である素数でない整数の個数は，

$$734-3=731$$

となる．また，2，3，5 以外の 7 個の素数 7，11，13，17，19，23，29 の中から異なる 2 数を取りだして掛け合わせることによってできる数はすべて素数でない U の要素であり，その個数は，

$${}_7\mathrm{C}_2=21$$

となる．

以上から，U の要素のうち素数でないものの個数 $n(\overline{P})$は，$731+21=752$以上であり，$(*)$が成立する．

よって，1000 以下の素数は 250 個以下である．

（証明終わり）

（注）1000 以下の素数は 168 個ある．

$\boxed{2}$ $k=1,2,3,\cdots$に対して，$[\sqrt{k}]=m$とおくと，mは正の整数であり，

$$m \leqq \sqrt{k} < m+1 \qquad \therefore \quad m^2 \leqq k < (m+1)^2$$

である．よって，$a_k=2^m$となるkは$(m+1)^2-m^2=2m+1$個あり，$a_k=2^m$を満たす項の和は，

$$(2m+1)2^m$$

である．

$1 \leqq k \leqq n^2$のときmのとりうる値は，$m=1,2,\cdots,n$である．$m=n$となるkは$k=n^2$だけであり，$a_{n^2}=2^n$であることに注意すると，$b_1=a_1=2$であり，$n \geqq 2$のとき，

$$b_n=\sum_{k=1}^{n^2} a_k=\sum_{m=1}^{n-1}(2m+1)2^m+a_{n^2}=2\sum_{m=1}^{n-1} m2^m+\sum_{m=1}^{n-1}2^m+2^n=2\sum_{m=1}^{n-1} m2^m+\sum_{m=1}^{n}2^m$$

となる．$S=\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} m2^m$とおくと，

$$S-2S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)2^{n-1}-\{1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+(n-2)2^{n-1}+(n-1)2^n\}$$

$$\therefore \quad -S=2+2^2+\cdots+2^{n-1}-(n-1)2^n$$

$$\therefore \quad S=(n-1)2^n-\sum_{m=1}^{n-1}2^m$$

となる．よって，

$$b_n=2\left\{(n-1)2^n-\sum_{m=1}^{n-1}2^m\right\}+\sum_{m=1}^{n}2^m=(n-1)2^{n+1}-\sum_{m=1}^{n-1}2^{m+1}+\sum_{m=1}^{n}2^m$$

$$=(n-1)2^{n+1}-(2^2+2^3+\cdots+2^n)+(2+2^2+\cdots+2^n)=(n-1)2^{n+1}+2 \qquad \cdots\text{(答)}$$

である．これは$n=1$のときも成り立つ．

$\boxed{3}$ (1) 2次方程式 $x^2-ax+b=0$ …① が実数解 α, β（$\alpha=\beta$ の場合も含む）をもつ条件は

$$a^2-4b \geqq 0 \quad \cdots②$$

である．以下，②のもとで考える．3辺の長さが1，α，β である三角形が存在する条件は

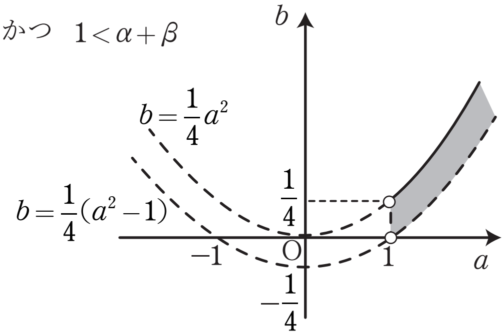
$$|\alpha-\beta|<1<\alpha+\beta \quad \cdots③$$

である．α，β は①の解であるから，解と係数の関係により，$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$ …④となる．よって，

$$③ \iff (\alpha-\beta)^2<1^2 \text{ かつ } 1<\alpha+\beta \iff (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta<1 \text{ かつ } 1<\alpha+\beta$$

$$\iff a^2-4b<1 \text{ かつ } 1<a \quad \cdots⑤$$

となる．



したがって，求める範囲は②かつ⑤，すなわち，

$$\frac{1}{4}(a^2-1)<b \leqq \frac{1}{4}a^2 \quad \cdots⑥ \text{ かつ } 1<a \quad \cdots⑦$$

であり，図示すると，右図の網目部分となる．ただし，境界は実線を含むが破線と○は除く．

(2) $k=\dfrac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}$ とおくと．④より，

$$k=\frac{b+1}{a^2} \qquad \therefore \quad b=ka^2-1 \quad \cdots⑧$$

となる．⑥かつ⑦かつ⑧を満たす実数 a，b が存在するような k の範囲が求めるものである．⑧を⑥に代入すると，

$$\frac{1}{4}(a^2-1)<ka^2-1 \leqq \frac{1}{4}a^2 \qquad \therefore \quad 3<(4k-1)a^2 \leqq 4 \quad \cdots⑨$$

となるから，⑦かつ⑨を満たす実数 a が存在するような k の範囲が求めるものである．

⑨を満たす実数 a が存在するには，$4k-1>0$ すなわち $k>\dfrac{1}{4}$ …⑩ が必要である．このとき，⑨は

$$\frac{3}{4k-1}<a^2 \leqq \frac{4}{4k-1} \quad \cdots⑪$$

となり，⑩のもとで，⑦かつ⑪を満たす実数 a が存在するのは，

$$1<\frac{4}{4k-1} \qquad \therefore \quad k<\frac{5}{4}$$

のときである．

以上から，求める範囲は，

$$\frac{1}{4}<k<\frac{5}{4} \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

$\boxed{4}$　　$C:\ x^2+(y-1)^2=1\quad\cdots①,\ S:\ y=\dfrac{1}{k}x^2\quad\cdots②$

(1)　①，②より y を消去すると，

$$x^2+\left(\frac{1}{k}x^2-1\right)^2=1 \iff \frac{1}{k^2}x^2\left\{x^2-k(2-k)\right\}=0$$

となる．C と S が共有点をちょうど 3 個もつ条件は，$x^2-k(2-k)=0$ が 0 以外の相異なる 2 実数解をもつことである．よって，求める k の範囲は

$$k(2-k)>0\qquad\therefore\quad 0<k<2\ \cdots③\qquad\cdots(答)$$

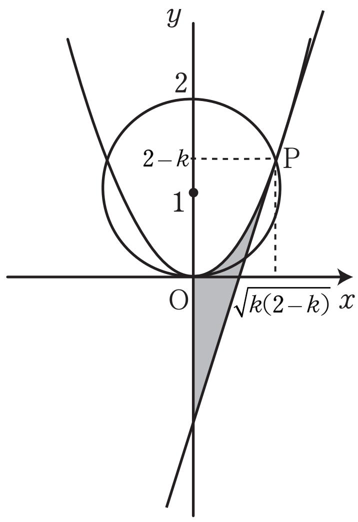
である．

(2)　③のもとで，$\mathrm{P}(\sqrt{k(2-k)},\,2-k)$ である．P における S の接線を $y=mx+n$ とおくと，

$$\frac{1}{k}x^2-(mx+n)=\frac{1}{k}\{x-\sqrt{k(2-k)}\}^2$$

となる．

考える領域は右図の網目部分であり，その面積を $T(k)$ とおくと，



$$T(k)=\int_0^{\sqrt{k(2-k)}}\left\{\frac{1}{k}x^2-(mx+n)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{k(2-k)}}\frac{1}{k}\{x-\sqrt{k(2-k)}\}^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3k}\{x-\sqrt{k(2-k)}\}^3\right]_0^{\sqrt{k(2-k)}}$$

$$=\frac{1}{3k}\{\sqrt{k(2-k)}\}^3=\frac{1}{3}\sqrt{k(2-k)^3}$$

$t=2-k$ とおくと，$k(2-k)^3=(2-t)t^3=2t^3-t^4$ となる．これを $f(t)$ とおくと，

$$f'(t)=6t^2-4t^3=4t^2\left(\frac{3}{2}-t\right)$$

となる．また，③より，t の範囲は $0<t<2$ となり，この範囲における増減は右表のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，$T(k)=\dfrac{1}{3}\sqrt{f(t)}$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のときに最大となり，最大値は，

$$\frac{1}{3}\sqrt{f\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{3}\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\qquad\cdots(答)$$

である．

$\boxed{5}$

$$\int_{a-3}^{a+3}(x-b)(x-c)\,dx=\int_{a-3}^{a+3}\{x^2-(b+c)x+bc\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{b+c}{2}x^2+bcx\right]_{a-3}^{a+3}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(a+3)^3-(a-3)^3\right\}-\frac{b+c}{2}\left\{(a+3)^2-(a-3)^2\right\}+bc\left\{(a+3)-(a-3)\right\}$$

$$=6\{a^2-(b+c)a+bc+3\}$$

であるから，$\int_{a-3}^{a+3}(x-b)(x-c)\,dx=0$となる条件は，

$$bc-(b+c)a+a^2+3=0\iff(b-a)(c-a)=-3$$

である．整数$b-a$，$c-a$の組は，

$$(b-a\,,\,c-a)=(1\,,\,-3)\,,\,(-3\,,\,1)\,,\,(3\,,\,-1)\,,\,(-1\,,\,3)\quad\cdots①$$

となる．①を満たす$(a\,,\,b\,,\,c)$の組を調べる．

1° $(b-a\,,\,c-a)=(1\,,\,-3)$のとき，$b=a+1\,,\,c=a-3$である．a，b，cはそれぞれ1以上6以下の整数であるから，$a=4\,,\,5$であり，2通りある．

2° $(b-a\,,\,c-a)=(-3\,,\,1)$のとき，1°の場合のbとcを入れかえたものであるから，2通りある．

3° $(b-a\,,\,c-a)=(3\,,\,-1)$のとき，$b=a+3\,,\,c=a-1$であり，a，b，cはそれぞれ1以上6以下の整数であるから，$a=2\,,\,3$であり，2通りある．

4° $(b-a\,,\,c-a)=(-1\,,\,3)$のとき，3°の場合のbとcを入れかえたものであるから，2通りある．

よって，①を満たす$(a\,,\,b\,,\,c)$の組は全部で$2\times4=8$通りあるから，求める確率は，

$$\frac{8}{6^3}=\frac{1}{27}\qquad\cdots(答)$$

である．