2021年度 北海道大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$

(1)　i) $n=1$ のとき $a_1=S_1=\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 9=3$

ii) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1}\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)-\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+7\}\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n+5)\\
&= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+7)-(n-1)(2n+5)\}\\
&= \frac{1}{6}n\{(2n^2+9n+7)-(2n^2+3n-5)\}\\
&= \frac{1}{6}n(6n+12)=n(n+2)
\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．

i), ii) より，$n\geqq 1$ のとき　$a_n=n(n+2)\cdots$(答)

(2)　i) $n=1$ のとき $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$

ii) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right.\\
&\quad \left.+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{4(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(3n^2+9n+6)-(2n+4)-(2n+2)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

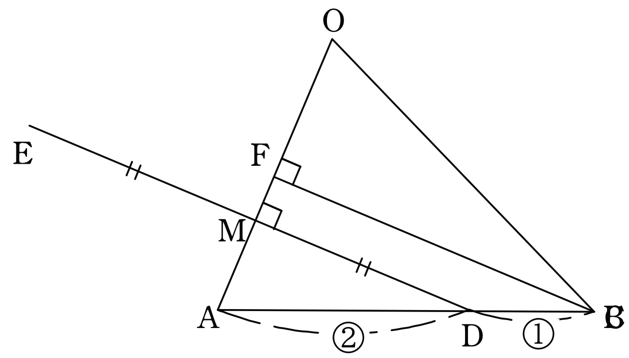
これは，$n=1$ のときも成り立つ．

i), ii) より，$n \geqq 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ $\cdots$(答)

$\boxed{2}$

(1) 点 F が直線 OA 上にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\vec{a}$



とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ より,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=0$

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

$\therefore\quad k\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\quad 16k-6=0$

よって, $k=\dfrac{3}{8}$ より,

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}$ ……(答)

である.

(2) OA と DE の交点を M とすると, 平行線と辺の比の関係から,

DM ：BF ＝AD：AB＝ 2 : 3

であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}\vec{a}-\vec{b}\right)$$

である．D は線分 AB を 2：1 に内分する点であることに注意して,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+2\overrightarrow{\mathrm{DM}}\\&=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\vec{a}-\vec{b}\right)\\&=\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$ ……(答)

である.

(3) $9\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|=20\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|$ より,

$9\left|\dfrac{5}{6}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}\right|=20\left|\dfrac{3}{8}\vec{a}\right|$

$\therefore\quad \dfrac{3}{2}\left|5\vec{a}-4\vec{b}\right|=\dfrac{15}{2}\left|\vec{a}\right|$

$\therefore\quad \left|5\vec{a}-4\vec{b}\right|=5\left|\vec{a}\right|$

両辺は正なので 2 乗すると,

$25\left|\vec{a}\right|^2+16\left|\vec{b}\right|^2-40\vec{a}\cdot\vec{b}=25\left|\vec{a}\right|^2$

$$\therefore \quad |\vec{b}|^2 = \frac{5\vec{a}\cdot\vec{b}}{2} = 15$$

$|\vec{b}| > 0$ であるから,

$$|\vec{b}| = \sqrt{15} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

$\boxed{3}$

(1)　$x+\dfrac{\pi}{6}=X$ とすると，$t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin X$ である．このとき，

$$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=\cos X$$

であるから，

$$\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos^2 X=1-\sin^2 X=1-t^2 \qquad \cdots\ (\text{答})$$

である．また，

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2X=1-2\sin^2 X=1-2t^2 \qquad \cdots\ (\text{答})$$

である．

(2)　(1)を用いて，

$$f(x)=\sqrt{3}t+2(1-t^2)+4(1-2t^2)=-10t^2+\sqrt{3}t+6=-(5t+2\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})$$

と表せる．よって，$f(x)=0$ を満たす t は，$t=-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

$0\leqq x\leqq \pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ であり，$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ である．

$$-\frac{1}{2}-\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-5}{10}=\frac{\sqrt{48}-\sqrt{25}}{10}>0$$

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{2}>0$$

であるから，$-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}<-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ である．

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$f(x)=0$ を満たす t は，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のみである．

以上より，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \quad \text{すなわち,}\ x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\ (\text{答})$$

である．

$\boxed{4}$

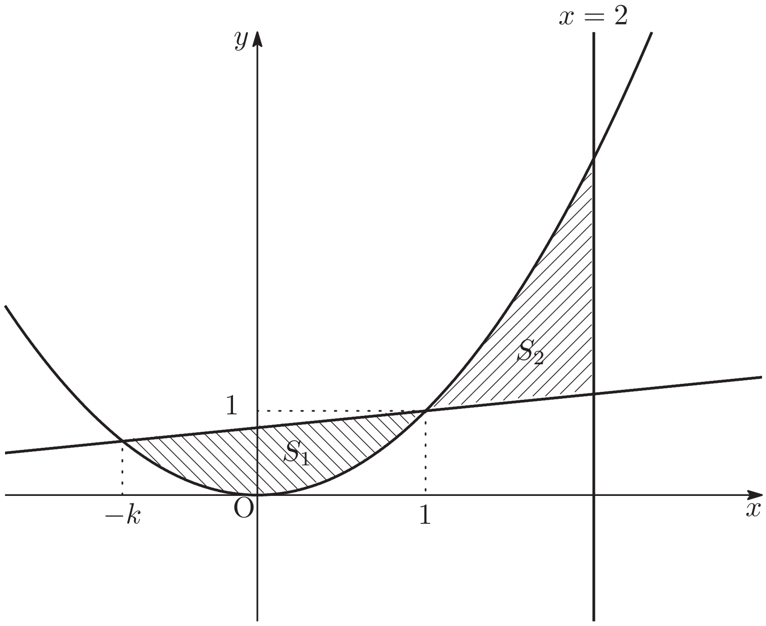
C と ℓ の共有点の x 座標は

$x^2 = (1-k)x + k$ より

$(x-1)(x+k) = 0$ であることより $x = 1,\ -k$

$k > -1$ より $-k < 1$ であることから

$C,\ \ell$ は下図のようになり，S_1，S_2 はそれぞれ下図の斜線部分の面積である．



(1) $-k \leqq x \leqq 1$ では $x^2 \leqq (1-k)x + k$ である．よって

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-k}^{1} \left[\{(1-k)x + k\} - x^2\right] dx \\
&= \int_{-k}^{1} \{-(x+k)(x-1)\}\, dx \\
&= \frac{1}{6}\{1-(-k)\}^3 = \frac{1}{6}(1+k)^3 \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

ただし

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いた．

(2) $1 \leqq x \leqq 2$ では $x^2 \geqq (1-k)x+k$ である．よって

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_1^2 \left[x^2 - \{(1-k)x+k\}\right] dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(1-k)x^2 - kx\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3}(2^3-1^3) - \frac{1}{2}(1-k)(2^2-1^2) - k(2-1) \\
&= \frac{7}{3} - \frac{3}{2}(1-k) - k = \frac{1}{2}k + \frac{5}{6} \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

(3) $f(k) = S_2 - S_1$ とおくと，

$f(k) = \dfrac{1}{2}k + \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6}(1+k)^3 = -\dfrac{1}{6}k^3 - \dfrac{1}{2}k^2 + \dfrac{2}{3}$

$f'(k) = -\dfrac{1}{2}k^2 - k = -\dfrac{1}{2}k(k+2)$

より，$f(k)$ の増減表は下のようになる．

k	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$f(k)$ すなわち $S_2 - S_1$ は $k=0$ のとき，最大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．$\cdots$(答)