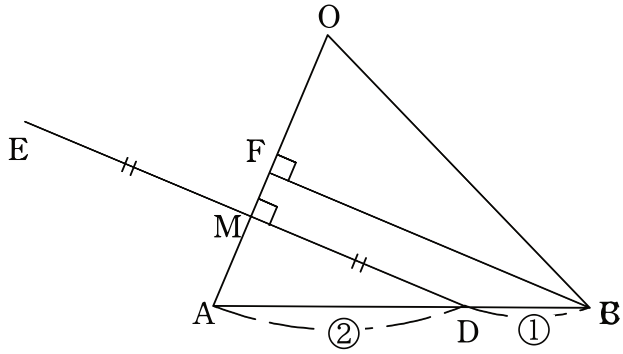
2021年度 北海道大学 前期 数学 理系

$\boxed{1}$



(1) 点Fが直線OA上にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\vec{a}$

とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ より,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=0$

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

$\therefore\quad k\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\quad 16k-6=0$

よって, $k=\dfrac{3}{8}$ より,

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}$ ……(答)

である.

(2) OAとDEの交点をMとすると, 平行線と辺の比の関係から,

FM：MA ＝ BD：DA＝ 1：2

である. また, (1)の結果より,

OF：OA＝3：8　　　∴　OF：FA＝3：5

であることより,

$\mathrm{OF}:\mathrm{FM}:\mathrm{MA}=3:5\times\dfrac{1}{3}:5\times\dfrac{2}{3}=9:5:10$ ……①

であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{9+5}{9+5+10}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{7}{12}\vec{a}$$

である.

Mは線分DEの中点であることより,

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$=\frac{7}{6}\vec{a}-\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

$$=\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$$ ……(答)

である.

(3) 平行線と辺の比の関係から,

$$\mathrm{DM}:\mathrm{BF}=\mathrm{AD}:\mathrm{AB}=2:3$$

であるから，① に注意すると，

$$\triangle\mathrm{BDE}=2\triangle\mathrm{BDM}$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BAM}$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{9+5+10}\triangle\mathrm{OAB}$$

$$=\frac{5}{18}\triangle\mathrm{OAB} \qquad \cdots\cdots②$$

であり，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{16|\vec{b}^2|-36}$$

$$=\sqrt{4|\vec{b}^2|-9}$$

であるから，$\triangle\mathrm{BDE}=\dfrac{5}{9}$ のとき ② より，

$$\frac{5}{18}\sqrt{4|\vec{b}^2|-9}=\frac{5}{9}$$

$$\therefore\quad \sqrt{4|\vec{b}^2|-9}=2$$

両辺は正なので 2 乗すると，

$$4|\vec{b}|^2-9=4$$

$|\vec{b}|>0$ であるから，

$$|\vec{b}|=\frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

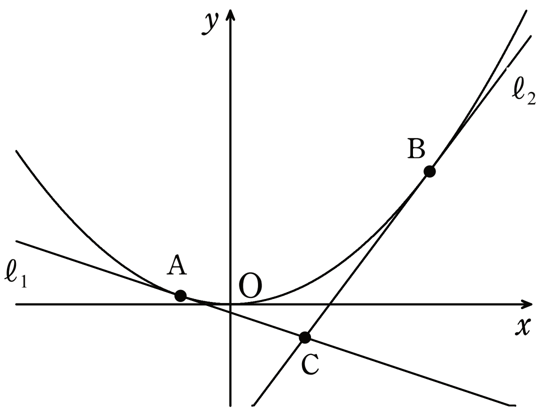
である．

$\boxed{2}$

(1)　$y'=x$ より, 接線 ℓ_1 の方程式は,

$$y=-(x+1)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad y=-x-\frac{1}{2} \qquad \cdots①$$



また, 接線 ℓ_2 の方程式は,

$$y=(a+2)\{x-(a+2)\}+\frac{(a+2)^2}{2}$$

$$\therefore\quad y=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2} \qquad \cdots②$$

である．y を消去して, $a \neq -3$ に注意すると,

$$-x-\frac{1}{2}=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}$$

$$\therefore\quad (a+3)x=\frac{(a+1)(a+3)}{2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{a+1}{2}$$

① に戻すと,

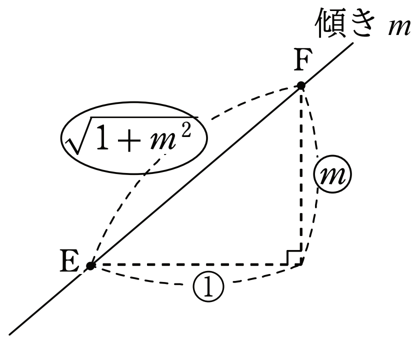
$$\mathrm{C}\left(\frac{a+1}{2},\ -\frac{a+2}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　右図の様な直線 EF の傾きを m とするとき,
E, F の x 座標を e, f とすると,

$$\mathrm{EF}=(f-e)\sqrt{1+m^2}$$

と表せることと $a>0$ に注意する．



直線 BC, すなわち直線 ℓ_2 の傾きは $a+2$ であり,

B, C の x 座標が $a+2$, $\dfrac{a+1}{2}$ であるから,

$$|\mathrm{BC}|=\left(a+2-\frac{a+1}{2}\right)\sqrt{1+(a+2)^2}$$

$$=\frac{a+3}{2}\sqrt{a^2+4a+5}$$

である．また, 直線 AB の傾きは,

$$\frac{\dfrac{(a+2)^2}{2}-\dfrac{1}{2}}{(a+2)-(-1)}=\frac{(a+1)(a+3)}{2(a+3)}=\frac{a+1}{2}$$

であり, A, B の x 座標が -1, $a+2$ であるから,

$$|\mathrm{AB}|=(a+3)\sqrt{1+\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}$$
$$=(a+3)\sqrt{\frac{a^2+2a+5}{4}}=\frac{a+3}{2}\sqrt{a^2+2a+5}$$

である．よって，

$$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{\frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}}=\sqrt{1-\frac{2a}{a^2+4a+5}}$$
$$=\sqrt{1-\frac{2}{a+4+\frac{5}{a}}}$$

である． $a+4+\frac{5}{a}>0$ に注意すると，$a+4+\frac{5}{a}$ が最小のとき，$-\frac{2}{a+4+\frac{5}{a}}$ が最大となり，$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最大となる． $a>0$, $\frac{5}{a}>0$ なので，相加平均・相乗平均の大小関係により，

$$a+\frac{5}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{5}{a}}=2\sqrt{5} \qquad \therefore \quad a+4+\frac{5}{a}\geqq 2\sqrt{5}+4$$

である．等号成立は

$$a=\frac{5}{a} \text{ かつ } a>0 \qquad \therefore \quad a=\sqrt{5}$$

のときである．

以上より，$a+4+\frac{5}{a}$ は

$a=\sqrt{5}$ ……(答)

のとき最小となるから，$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ はこのとき最大となる．

別解

$\frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}$ を最大にする a の値を求める際，数学Ⅲの微分法を用いても良い．

$$f(a)=\frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}=1-\frac{2a}{a^2+4a+5}$$

とおくと，

$$f'(a)=-2\cdot\frac{1\cdot(a^2+4a+5)-a\cdot(2a+4)}{(a^2+4a+5)^2}=\frac{2(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}{(a^2+4a+5)^2}$$

である．分母は正で，$a+\sqrt{5}>0$ であることに注意すると $f'(a)$ と $a-\sqrt{5}$ の符号が一致することから

$a>\sqrt{5}$ のとき, $f'(a)>0$

$a=\sqrt{5}$ のとき, $f'(a)=0$

$a<\sqrt{5}$ のとき, $f'(a)<0$

である．これより, 増減表は右の様になるから,

a	0		$\sqrt{5}$	
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘	最小	↗

$a=\sqrt{5}$ ……(答)

のとき, $\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最大となる．

$\boxed{3}$

(1) $(\star)$ より，

$$\frac{(3^{4x})^2+9(3^{y^2})}{6}=3^{4x}\cdot 3^{y^2} \qquad \therefore\ (3^{4x})^2-6\cdot 3^{4x}\cdot 3^{y^2}+9(3^{y^2})^2=0$$

$$\therefore\ (3^{4x}-3\cdot 3^{y^2})^2=0 \qquad \therefore\ 3^{y^2}=\frac{3^{4x}}{3}=3^{4x-1}$$

であるから，

$$y^2=4x-1.$$

(2) $x>0$ かつ $y>0$ かつ $1-\dfrac{x}{y}>0$ のもとで，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}&=\frac{1}{\dfrac{\log_4 4}{\log_4\left(1+\dfrac{x}{y}\right)}}+\frac{1}{\dfrac{\log_4 4}{\log_4\left(1-\dfrac{x}{y}\right)}}\\&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right)\\&=\log_4\left\{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)\right\}\\&=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\end{aligned}$$

であり，底が 1 より大きいので，$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ が最大となるのは $\dfrac{x^2}{y^2}$ が最小になるときである．

ここで，(1) より，

$$x=\frac{y^2+1}{4}$$

であるから，

$$\frac{x^2}{y^2}=\left(\frac{y^2+1}{4y}\right)^2=\left\{\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\}^2\geqq\left(\frac{1}{2}\sqrt{y\cdot\frac{1}{y}}\right)^2=\frac{1}{4}$$

であり，この不等式の等号は，

$$y=\frac{1}{y}\text{かつ } y^2=4x-1 \text{ かつ } x>0 \text{ かつ } y>0 \text{ かつ } 1-\frac{x}{y}>0$$

すなわち，

$$x=\frac{1}{2},\ y=1$$

のときなりたつ．

よって，求める最大値は，

$$\log_4\left(1-\frac{1}{4}\right)=\log_4\frac{3}{4}.$$

(2)(別解)

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

であり，底が 1 より大きいので，$1-\dfrac{x^2}{y^2}$ が最大となるときを考えればよい．

(1) より，$1-\dfrac{x^2}{y^2}=1-\dfrac{x^2}{4x-1}$ である．

ここで，

$$x>0 \text{ かつ } y>0 \text{ かつ } y^2=4x-1 \text{ かつ } 1-\frac{x}{y}>0$$

すなわち，

$$x>0 \text{ かつ } y>0 \text{ かつ } y^2=4x-1 \text{ かつ } y^2>x^2$$

であるから，x のとりうる値の範囲は，

$$x>0 \text{ かつ } 4x-1>x^2$$

より，$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ である．

$f(x)=1-\dfrac{x^2}{4x-1}$ とすると，

$$f'(x)=-\frac{2x(4x-1)-x^2\cdot 4}{(4x-1)^2}=-\frac{2x(2x-1)}{(4x-1)^2}$$

となるので，$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ における $f(x)$ の増減は次のとおりになる．

x	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ であり，求める最大値は $\log_4\dfrac{3}{4}$.

$\boxed{4}$

$a_1=2,\ b_1=1$ および

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+3b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=a_n+2b_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

より, すべての自然数 n に対して $a_n,\ b_n$ は整数である.

(1) ①, ②に $n=1$ を代入すると

$$a_2=2a_1+3b_1=7,\ b_2=a_1+2b_1=4$$

となる. よって

$$c_2=28 \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2) すべての自然数 n に対して c_n が偶数である $\cdots\cdots(*)$ ことを数学的帰納法により示す.

(I) $n=1$ のとき, $c_1=2$ であるから $(*)$ は成り立つ.

(II) $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つ, すなわち c_k が偶数であると仮定する. ①, ②より

$$\begin{aligned} c_{k+1}&=a_{k+1}b_{k+1}\\ &=(2a_k+3b_k)(a_k+2b_k)\\ &=2{a_k}^2+7a_kb_k+6{b_k}^2\\ &=7c_k+2({a_k}^2+3{b_k}^2) \end{aligned}$$

である. 帰納法の仮定と ${a_k}^2+3{b_k}^2$ が整数であることより, $7c_k,\ 2({a_k}^2+3{b_k}^2)$ はともに偶数となるから, c_{k+1} は偶数である. よって, $n=k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つ.

(I), (II) より, すべての自然数 n に対して c_n は偶数である. (証明おわり)

(3) m を自然数として, c_{2m} が 28 で割り切れる $\cdots\cdots(**)$ ことを数学的帰納法により示す.

(I) $m=1$ のとき, (1) より $(**)$ は成り立つ.

(II) $m=k$ のとき $(**)$ が成り立つ, すなわち c_{2k} が 28 で割り切れると仮定する. ①, ②より

$$\begin{aligned} c_{2k+2}&=a_{2k+2}b_{2k+2}\\ &=(2a_{2k+1}+3b_{2k+1})(a_{2k+1}+2b_{2k+1})\\ &=\{2(2a_{2k}+3b_{2k})+3(a_{2k}+2b_{2k})\}\{(2a_{2k}+3b_{2k})+2(a_{2k}+2b_{2k})\}\\ &=(7a_{2k}+12b_{2k})(4a_{2k}+7b_{2k})\\ &=28{a_{2k}}^2+97a_{2k}b_{2k}+84{b_{2k}}^2\\ &=97c_{2k}+28({a_{2k}}^2+3{b_{2k}}^2) \end{aligned}$$

である. 帰納法の仮定と ${a_{2k}}^2+3{b_{2k}}^2$ が整数であることより, $97c_k,\ 28({a_{2k}}^2+3{b_{2k}}^2)$ はともに 28 で割り切れるから, c_{2k+2} は 28 で割り切れる. よって, $m=k+1$ のときにも $(**)$ は成り立つ.

(I), (II) より, すべての自然数 m に対して c_{2m} は 28 で割り切れる, すなわち, n が偶数のとき, c_n は 28 で割り切れる. (証明おわり)

(注) $a_1 = 2,\ b_1 = 1$ であり, ①, ②より

a_nが偶数, b_nが奇数のとき, a_{n+1}は奇数, b_{n+1}は偶数
a_nが奇数, b_nが偶数のとき, a_{n+1}は偶数, b_{n+1}は奇数

となるので, a_n, b_n の一方は偶数, もう一方は奇数となる. これより, c_n が偶数であることが示される.

また, ①, ②より

$$a_{2m+2} = 2a_{2m+1} + 3b_{2m+1} = 2(2a_{2m} + 3b_{2m}) + 3(a_{2m} + 2b_{2m}) = 7a_{2m} + 12b_{2m}$$
$$b_{2m+2} = a_{2m+1} + 2b_{2m+1} = (2a_{2m} + 3b_{2m}) + 2(a_{2m} + 2b_{2m}) = 4a_{2m} + 7b_{2m}$$

であるから, a_{2m}, b_{2m} の少なくとも一方は 4 の倍数であり, 少なくとも一方は 7 の倍数であることを数学的帰納法により証明することで, n が偶数のとき, c_n は 28 で割り切れることが示される.

$\boxed{5}$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\cdot\cos\theta + (1+\cos\theta)\cdot(-\sin\theta) = -\sin\theta(1+2\cos\theta)$$

であるから, これと $y=\sin\theta$ より $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における x, y の増減は下のようになる.

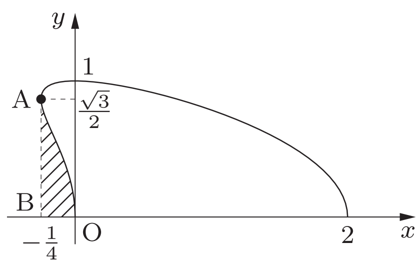
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

(1)　増減表より

$$a = -\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2)　増減表より C は右のようになる. よって, 斜線部分の面積が求めるものであるから



$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\
&= -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin^2\theta(1+2\cos\theta)\,d\theta \\
&= -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left(\sin^2\theta + 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\,d\theta \\
&= -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left\{\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\sin^2\theta\,(\sin\theta)'\right\}\,d\theta \\
&= -\left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + \frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である.