2021年度 浜松医科大学 医学科 数学

1

(1)　a, b, c が実数であることに注意すると,

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$\geqq 0$$

であり，この等号が成り立つときの条件は,

$$a-b=b-c=c-a=0 \qquad \therefore \quad a=b=c$$

である.

(2)　正の実数 x, y, z に対して，$\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{y}$, $\sqrt[3]{z}$ もまた正であるから,

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}>0 \quad \cdots\cdots ①$$

である.

ここで，与えられた等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad \cdots\cdots ②$$

で，$(a, b, c)=\left(\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y}, \sqrt[3]{z}\right)$ とおき，(1)の結果と①を用いると,

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{y}\right)^3+\left(\sqrt[3]{z}\right)^3-3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{z}\geqq 0$$

$$\therefore \quad x+y+z-3\cdot\sqrt[3]{xyz}\geqq 0 \qquad \therefore \quad \frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \therefore \quad P\geqq Q$$

となり，この等号が成り立つときの条件は,

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z} \qquad \therefore \quad x=y=z$$

である.

また，③で，x, y, z をそれぞれ $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ で置き換えれば,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqq\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}} \qquad \therefore \quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqq\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \qquad \therefore \quad \frac{1}{R}\geqq\frac{1}{Q}$$

となり，$Q>0, R>0$ であることより,

$Q\geqq R$

である．さらに，この等号が成り立つときの条件は,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \qquad \therefore \quad x=y=z$$

である.

以上より，

$$P \geqq Q \geqq R$$

が成り立ち，各等号が成り立つときの条件は，いずれも $x=y=z$ である．

2

(1)　(a)　$\mathrm{BC} = x$ とおくと，$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 2 : 1$ より，

$$\mathrm{BD} = \frac{2}{3}x$$

である．このとき，三角形 ABD に余弦定理を適用すると，

$$\cos B = \frac{4^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 1^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}x}$$

を得る．一方，三角形 ABC に余弦定理を適用すると，

$$\cos B = \frac{4^2 + x^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot x}$$

を得るから，これらを等置して，

$$\frac{4^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 1^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}x} = \frac{4^2 + x^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot x}$$

より，

$$15 + \frac{4}{9}x^2 = \frac{2}{3}(7 + x^2) \qquad \therefore \quad \frac{2}{9}x^2 = \frac{31}{3}$$

となる．したがって，

$$\mathrm{BC} = x = \frac{\sqrt{186}}{2}$$

である．

(b)　点 D が辺 BC を $2 : 1$ に内分するから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$ である．この等式の両辺の大きさの 2 乗を考えると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 = \frac{1}{9}\left\{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + 4\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + 4\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right\}$$

より，

$$1 = \frac{1}{9}\left(16 + 4\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + 36\right) \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\frac{43}{4}$$

である．このことを用いると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = 9 - 2 \cdot \left(-\frac{43}{4}\right) + 16 = \frac{93}{2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{BC} = \frac{\sqrt{186}}{2}$$

である．

(2)　(a)　焦点が $(0,\ 0)$，準線が $y=-2$ の放物線の頂点は $(0,\ -1)$ であるから，この放物線の方程式は，$x^2=4(y+1)$ ……① である．したがって，直線 $y=2$ との交点 P の x 座標は ① に $y=2$ を代入して，

$$x^2=12$$

を満たす．つまり，求める点 P の座標は，

$$\mathrm{P}(\pm 2\sqrt{3},\ 2)$$

である．

(b)　$\mathrm{P}(x,\ 2)$ とおき，P から準線 $y=-2$ に下ろした垂線を PH とすると，

$$\mathrm{PH}=4$$

である．点 P が題意の放物線上にあるための条件は $\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$ が成り立つことであるから，x は，

$$\mathrm{OP}^2=4^2 \qquad \therefore \quad x^2+2^2=16$$

より，

$$x^2=12$$

を満たす．つまり，求める点 P の座標は，

$$\mathrm{P}(\pm 2\sqrt{3},\ 2)$$

である．

3

(1)　$n-1$ 段目までの登り方の総数は a_{n-1} 通りあり，このあと 1 段だけ登って n 段目を踏む登り方が b_n であるから，

$$b_n = a_{n-1}\cdot 1 = a_{n-1}$$

$n-2$ 段目までの登り方の総数は a_{n-2} 通りあり，このあと 1 段飛ばして登って n 段目を踏む登り方が c_n であるから，

$$c_n = a_{n-2}\cdot 1 = a_{n-2}$$

(2)　n 段目までの登り方のうち $n-1$ 段目を踏む登り方と $n-1$ 段目を踏まない登り方に重複はない．よって，$n \geqq 3$ のとき，

$$a_n = b_n + c_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であるから，①の両辺を a_{n-1} で割ると

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

となり，さらに $x_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくと，$x_{n-1} = 1 + \dfrac{1}{x_{n-2}}$ より，

$$x_{n-1}x_{n-2} = x_{n-2} + 1 \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$ の存在を仮定して，この値を α とおく．すべての自然数 n に対して $x_n > 0$ であるから $\alpha \geqq 0$ であり，②の両辺で $n \to \infty$ とすることにより，

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

となる．$\alpha \geqq 0$ のもとでこれを解くと，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(3)
$$a_{2n} = {a_n}^2 + {a_{n-1}}^2 \qquad \cdots\cdots(☆)$$

2 以上のすべての整数 n に対して (☆) が成立することを数学的帰納法によって以下に示す．

(I)　$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ であり，これらと①より，$a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13$ であるから，

$$\begin{aligned}{a_2}^2 + {a_1}^2 &= 4 + 1 = 5 = a_4,\\ {a_3}^2 + {a_2}^2 &= 9 + 4 = 13 = a_6\end{aligned}$$

となり，$n = 2,\ n = 3$ において (☆) は正しい．

(Ⅱ)　$n=k,\ n=k+1\ (k \geqq 2)$ のとき (☆) が正しい，すなわち

$$a_{2k}={a_k}^2+{a_{k-1}}^2,\quad a_{2(k+1)}={a_{k+1}}^2+{a_k}^2 \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つものと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
a_{2(k+2)} &= a_{2k+3}+a_{2k+2} && (①より)\\
&= (a_{2k+2}+a_{2k+1})+a_{2k+2} && (①より)\\
&= 2a_{2k+2}+a_{2k+1}\\
&= 2a_{2k+2}+(a_{2k+2}-a_{2k}) && (①より)\\
&= 3a_{2k+2}-a_{2k}\\
&= 3({a_{k+1}}^2+{a_k}^2)-({a_k}^2+{a_{k-1}}^2) && (③より)\\
&= 3{a_{k+1}}^2+2{a_k}^2-{a_{k-1}}^2\\
&= 3{a_{k+1}}^2+2{a_k}^2-(a_{k+1}-a_k)^2 && (①より)\\
&= 2{a_{k+1}}^2+2a_{k+1}a_k+{a_k}^2\\
&= ({a_{k+1}}^2+2a_{k+1}a_k+{a_k}^2)+{a_{k+1}}^2\\
&= (a_{k+1}+a_k)^2+{a_{k+1}}^2\\
&= {a_{k+2}}^2+{a_{k+1}}^2 && (①より)
\end{aligned}$$

より，$n=k+2$ においても (☆) は正しい．

以上 (Ⅰ),(Ⅱ) より，2 以上のすべての整数 n に対して (☆) は正しい．

4

(1)　$x>1$のとき，

$$f(x)=\sqrt[n]{x^{n-k}(x-1)^k}=\sqrt[n]{x^n\left(\frac{x-1}{x}\right)^k}=x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{n}}$$

である．

　$x\to\infty$のとき，$f(x)-ax$が収束するならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b$（$b$は定数）とおけるから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax}{x}=0 \qquad \therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{n}}-a\right\}=0$$

$$\therefore \quad 1-a=0 \qquad \therefore \quad a=1$$

である．すなわち，$x\to\infty$のとき，$f(x)-ax$が収束するためには，$a=1$が必要である．

　$a=1$のとき，$x>1$において，

$$f(x)-ax=f(x)-x=x\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{n}}-1\right\}$$

であるから，$t=1-\dfrac{1}{x}$とおくと，$0<t<1$，$x\to\infty$のとき$t\to1-0$であり，$x=-\dfrac{1}{t-1}$である．

　よって，$g(x)=x^{\frac{k}{n}}$（$x>0$）とおくと，$g'(x)=\dfrac{k}{n}x^{\frac{k}{n}-1}$であることより，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=\lim_{t\to1-0}\left(-\frac{t^{\frac{k}{n}}-1}{t-1}\right)=\lim_{t\to1-0}\left\{-\frac{g(t)-g(1)}{t-1}\right\}=-g'(1)=-\frac{k}{n}$$

となるから，$x\to\infty$のとき，$f(x)-ax$が収束するような定数aの値と，そのときの極限値は

$$a=1,\ 極限値-\frac{k}{n}$$

である．

(2)

$$\{f(x)\}^n=x^{n-k}(x-1)^k$$

であり，この両辺をxで微分すると，

$$\begin{aligned}n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)&=(n-k)x^{n-k-1}\cdot(x-1)^k+x^{n-k}\cdot k(x-1)^{k-1}\\&=x^{n-k-1}(x-1)^{k-1}\{(n-k)(x-1)+kx\}\\&=x^{n-k-1}(x-1)^{k-1}(nx-n+k)\end{aligned}$$

となるから，$x\neq0$，1のとき，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{x^{n-k-1}(x-1)^{k-1}(nx-n+k)}{n\{f(x)\}^{n-1}}\\&=\frac{x^{n-k-1}(x-1)^{k-1}}{\left\{\sqrt[n]{x^{n-k}(x-1)^k}\right\}^{n-1}}\left(x-\frac{n-k}{n}\right)\\&=\sqrt[n]{x^{n(n-k-1)-(n-1)(n-k)}(x-1)^{n(k-1)-(n-1)k}}\left(x-\frac{n-k}{n}\right)\\&=\sqrt[n]{x^{-k}(x-1)^{-(n-k)}}\left(x-\frac{n-k}{n}\right)\end{aligned}$$

となる．

　よって，$f(x)$が原点で極値をもつための条件は，$f'(x)$が$x=0$の前後で符号変化する

ことであり，n が奇数であること……① と，$0<k<n$……② より $0<\dfrac{n-k}{n}<1$ であることに注意すると，x^{-k} に注目することにより，その条件は，

k が奇数であること ……③

である．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{n-k}{n}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	／	$-$	0	$+$	／	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\dfrac{\sqrt[n]{(n-k)^{n-k}k^k}}{n}$	↗	0	↗

このとき，$f(x)$ の増減は右表のようになるから，①，②，③，および，$n-k$ が偶数であることより，

$$\lim_{x\to-0} f'(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to+0} f'(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1} f'(x)=\infty$$

であること，(1)より，$y=f(x)$ は $x\to\infty$ において $y=x-\dfrac{k}{n}$ を漸近線にもち，同様に，$x\to-\infty$ においても $y=x-\dfrac{k}{n}$ を漸近線にもつことも考慮すると，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる．