2021年度 慶應義塾大学 薬学部 数学

〔I〕

(1)　$(1+i)^{10}=(2i)^5=\boxed{32i}$　（ア）

(2)　xの値が 2 から 5 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率は，

$$\begin{aligned}\frac{f(5)-f(2)}{5-2}&=\frac{(25+5a+b)-(4+2a+b)}{3}\\&=7+a\end{aligned}$$

これが$\dfrac{13}{2}$に等しいので，

$$7+a=\frac{13}{2}$$

$$\therefore\quad a=\boxed{-\frac{1}{2}}\quad\text{（イ）}$$

一方，方程式 $f(x)=0$，つまり $a=-\dfrac{1}{2}$ を代入して変形した方程式 $2x^2-x+2b=0$ は 2 つの異なる実数解を持つから，判別式を D とすると $D=1-16b$ は 0 以上であり，2 つの実数解の差が 1 であることから，解の公式を用いて

$$\frac{1+\sqrt{1-16b}}{4}-\frac{1-\sqrt{1-16b}}{4}=1$$

$$\sqrt{1-16b}=2$$

$$1-16b=4$$

であり，確かに$1-16b\geqq0$ を満たす．

$$\therefore\quad b=\boxed{-\frac{3}{16}}\quad\text{（ウ）}$$

(3)(i)　$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=3:4$ より $16\mathrm{AP}^2=9\mathrm{BP}^2$ である．点 P の座標を (X,Y) とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=X^2+Y^2,\quad \mathrm{BP}^2=(X-7)^2+Y^2$$

であるから，

$$16(X^2+Y^2)=9\{(X-7)^2+Y^2\}$$

$$7X^2+7Y^2+126X=441$$

$$(X+9)^2+Y^2=144$$

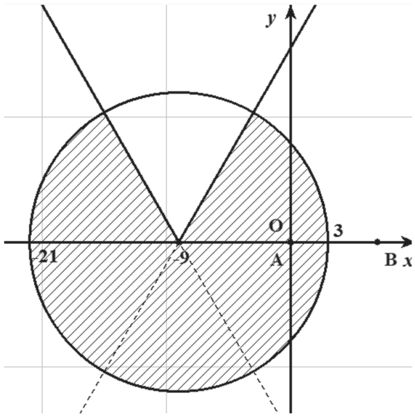
この式変形を逆にたどれば，$(X+9)^2+Y^2=144$ を満たす点 (X,Y) は全て $16\mathrm{AP}^2=9\mathrm{BP}^2$，つまり $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=3:4$ を満たす．したがって，点 P の軌跡の方程式は

$\boxed{(x+9)^2+y^2=144}$ （エ）

(ii)　(i)で求めた点 P の軌跡を境界線とする 2 つの領域のうち，点 A を含む領域を R_1 とすると，R_1 は不等式

$$(x+9)^2+y^2 \leqq 144$$

で表される．一方，不等式 $y \leqq \sqrt{3}|x+9|$ が表す領域を R_2 とすると，R_1 と R_2 の共通部分は右図のようになる．



ここで，ある直線と x 軸のなす角を θ（ただし $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$）とするとき，この直線の傾きは $\tan\theta$ と表されることを用いると，R_2 の境界線は傾き $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の直線であるから，これらの境界線は x 軸とそれぞれ $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ の角をなすことがわかる．したがって，R_1 と R_2 の共通部分は，半径 12 の円から中心角 $\frac{\pi}{3}$ のおうぎ形を除いたものである．その面積は，

$$\frac{1}{2}\times 12^2\times\frac{5}{3}\pi=\boxed{120\pi}$$ （オ）

(4)　半角の公式より，$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$，$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{2}$ であるから，方程式の左辺を変形すると，

$$\begin{aligned}4\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)&=4\cos^2\frac{\theta}{2}+4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=4\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}+4\cdot\frac{\sin\theta}{2}\\&=2\sin\theta+2\cos\theta+2\end{aligned}$$

これにより，方程式は

$$2\sin\theta+2\cos\theta+2=1$$

$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\boxed{-\frac{1}{2}}$$ （カ）

次に，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\geqq 0$ であるから，先に $\cos\theta$ の値を考える．上で求めた式より

$$\sin\theta=-\cos\theta-\frac{1}{2}$$

であるから，これを三角関数の相互関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると，

$$\left(-\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\theta=1$$

$$8\cos^2\theta+4\cos\theta-3=0$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$$

$\cos\theta≧0$ より $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$

したがって，

$$\begin{aligned}\sin\theta&=-\cos\theta-\frac{1}{2}\\&=-\frac{-1+\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{2}\\&=\boxed{\frac{-1-\sqrt{7}}{4}}\ \text{（キ）}\end{aligned}$$

(5)(i)

$$\begin{aligned}a_2&=210210_{(3)}\\&=0\times3^0+1\times3^1+2\times3^2+0\times3^3+1\times3^4+2\times3^5\\&=\left(0\times3^0+1\times3^1+2\times3^2\right)\left(1+3^3\right)\\&=\boxed{588}\text{（ク）}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}a_n&=0\times3^0+1\times3^1+2\times3^2+0\times3^3+1\times3^4+2\times3^5+\cdots+0\times3^{3n-3}+1\times3^{3n-2}+2\times3^{3n-1}\\&=\left(0\times3^0+1\times3^1+2\times3^2\right)\left(1+3^3+\cdots+3^{3(n-1)}\right)\end{aligned}$$

のように，a_n は初項 $0\times3^0+1\times3^1+2\times3^2=21$，公比 $3^3=27$，項数 n の等比数列の和として表される．したがって，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{21\times\left(27^n-1\right)}{27-1}\\&=\boxed{\frac{21\left(27^n-1\right)}{26}}\text{（ケ）}\end{aligned}$$

(6)(i)

$$\begin{aligned}6x^2+13xy+7x+5y^2+7y+2&=5y^2+\left(13x+7\right)y+\left(2x+1\right)\left(3x+2\right)\\&=\left\{y+\left(2x+1\right)\right\}\left\{5y+\left(3x+2\right)\right\}\\&=\boxed{\left(2x+y+1\right)\left(3x+5y+2\right)}\text{（コ）}\end{aligned}$$

(ii)　整数 x, y は $x>1, y>1, x \neq y$ を満たすので， x, y の小さい方は 2 以上，大きい方は 3 以上の整数である．よって，

$$3x+5y+2>2x+y+1 \geqq 2\cdot 2+3+1=8 \qquad \cdots①$$

である．一方，素因数分解により $966=2\times 3\times 7\times 23$ である．したがって，与えられた等式は，

$$(2x+y+1)(3x+5y+2)=2\cdot 3\cdot 7\cdot 23$$

のように変形できる．これを整数 x, y が満たすとき，①により x, y は，

$$\text{(a)}\begin{cases}2x+y+1=14\\3x+5y+2=69\end{cases}\quad \text{(b)}\begin{cases}2x+y+1=21\\3x+5y+2=46\end{cases}\quad \text{(c)}\begin{cases}2x+y+1=23\\3x+5y+2=42\end{cases}$$

のいずれかを満たす．これらをそれぞれ連立して解くと，

(a)　$(x, y)=\left(-\dfrac{2}{7}, \dfrac{95}{7}\right)$ より不適

(b)　$(x, y)=(8, 4)$ より適

(c)　$(x, y)=(10, 2)$ より適

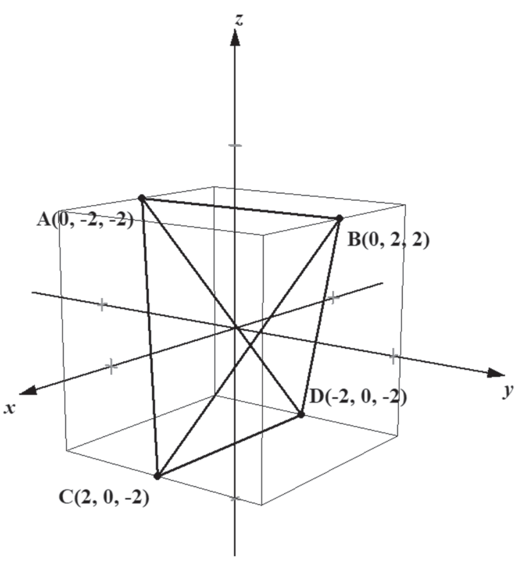
したがって，等式を満たす整数 x と y の組は

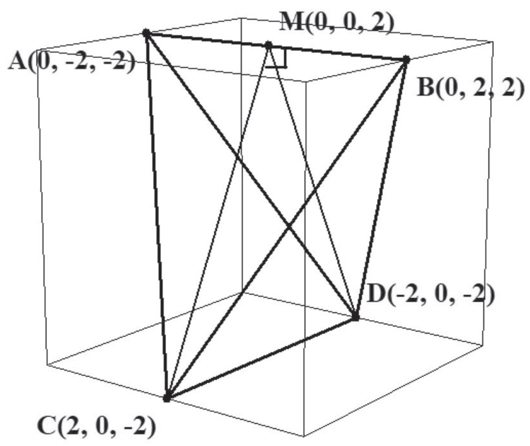
$$(x, y)=\boxed{(8, 4), (10, 2)}$$ （サ）

(7)　四面体 ABCD は，下左図のような立方体の辺の中点を結ぶことによって得られる．線分 AB の中点 $(0, 0, 2)$ を点 M とすると，四面体 ABCD の体積は，

$$\triangle \mathrm{CMD}\times(\mathrm{AM}+\mathrm{BM})\times\frac{1}{3}=4\times 4\times\frac{1}{2}\times(2+2)\times\frac{1}{3}$$

$$=\boxed{\frac{32}{3}}\text{(シ)}$$





〔Ⅱ〕

(1)　正 n 角形の頂点を順に $P_1, P_2, \dots, P_n$ とする.

(i)　正 n 角形における全事象 U_n に含まれる根元事象の数は

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ 通り}$$

面積が最小となるのは，例えば△ $P_1P_2P_3$ のように隣接する 3 頂点を選んだときであり，その事象 A_n に含まれる根元事象の数は n 通りである.

したがって，事象 U_6 において事象 A_6 の確率は

$$\frac{6}{{}_6\mathrm{C}_3} = \boxed{\frac{3}{10}} \quad \text{（ス）}$$

(ii)　事象 U_n において，事象 A_n の確率は

$$\frac{n}{{}_n\mathrm{C}_3} = n \div \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \boxed{\frac{6}{(n-1)(n-2)}} \quad \text{（セ）}$$

この確率が $\frac{1}{1070}$ 以下になることから，

$$\frac{6}{(n-1)(n-2)} \leqq \frac{1}{1070}$$

$$(n-1)(n-2) \geqq 6420 \qquad \cdots①$$

ここで，$n \geqq 2$ において①の左辺は単調増加であり，

$$80 \cdot 79 = 6320 < 6420, \quad 81 \cdot 80 = 6480 > 6420$$

であるから，①を満たす最小の自然数 n の値は $\boxed{82}$ （ソ）

(iii)　事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ に含まれる根元事象の数は，

$${}_n\mathrm{C}_3 - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n = \frac{n(n+1)(n-4)}{6} \text{ 通り}$$

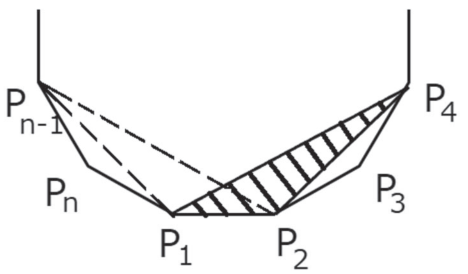
事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ において面積が最小，つまり事象 U_n において面積が 2 番目に小さな三角形ができる事象を考えるが，それは図の斜線部のように，ある辺の両端にあたる 2 点と，その一方の二つ隣にあたる 1 点の合わせて 3 点を取る場合である. このような 3 点の取り方は，正 n 角形の辺の選び方が n 通りあり，その各々に対してあと 1 点の取り方は 2 通りずつあるので，

$$n \cdot 2 = 2n \text{ 通り}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{2n}{{}_n\mathrm{C}_3 - n} = 2n \div \frac{n(n+1)(n-4)}{6}$$

$$= \boxed{\frac{12}{(n+1)(n-4)}} \text{（タ）}$$



(注) 事象 U_n における三角形の面積が最小になる場合と2番目に小さい値になる場合は次のように考えることができる.

正 n 角形の頂点を順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$ とし, $k,\ l$ を $1 < k < l \leqq n$ を満たす整数として, $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l$ の面積の最小値 M_1 と2番目に大きい値 M_2 を求める. k を $2 \leqq k \leqq n-1$ の範囲で固定したときの $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l$ の面積の最小値を $m_1(k)$, 2番目に大きい値を $m_2(k)$ とする.

(i) $k=2$ のとき, $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_l$ の面積は $l=3,\ n$ で最小値, $l=4,\ n-1$ で2番目に大きい値となる. よって

$$m_1(2) = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3, \quad m_2(2) = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4$$

である.

(ii) $k=3$ のとき, $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_l$ の面積は $l=4,\ n$ で最小値, $l=5,\ n-1$ で2番目に大きい値となる. よって

$$m_1(3) = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4, \quad m_2(3) = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_5$$

である.

(iii) $4 \leqq k \leqq n-2$ のとき, $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l$ の面積は $l=k+1,\ n$ で最小値, $l=k+2,\ n-1$ で2番目に大きい値となる. よって

$$m_1(k) = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}, \quad m_2(k) = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+2}$$

である.

(iv) $k=n-1$ のとき, $l=n$ であるから, $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l$ は $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ のみである. よって

$$m_1(n-1) = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$$

であり, $m_2(n-1)$ はない.

すべての k で $m_1(k) < m_2(k)$ であり, k を $4 \leqq k \leqq n-2$ として

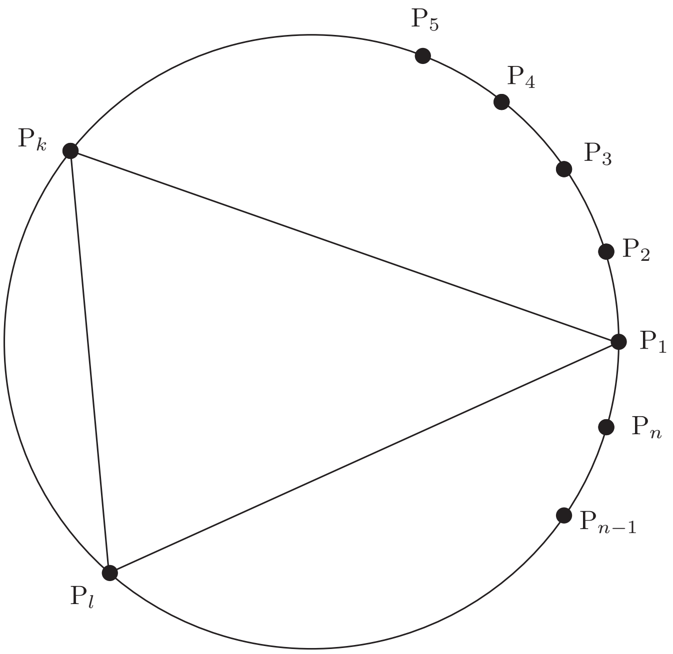
$$m_1(2) = m_1(n-1)$$

$$m_2(2) = m_1(3) < m_1(k)$$

であるから

$$M_1 = m_1(2), \quad M_2 = m_2(2)$$

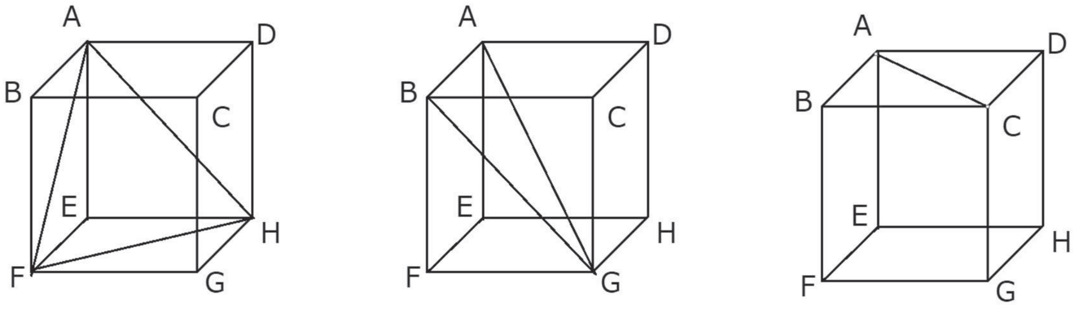
である.



(2)　立方体における全事象Vに含まれる根元事象の数は

$${}_8C_3 = 56\text{通り}$$

立方体の頂点から 3 点を選んでできる三角形は 3 種類考えられる.



(i)　三角形 AFH と合同な三角形（正方形の対角線を結んでできる正三角形）

立方体のどの頂点をこの正三角形で切り落とすか，と考えて 8 通り

正三角形の 1 辺（＝正方形の対角線）の長さは 2 であるから，面積は$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

(ii)　三角形 ABG と合同な三角形（立方体の辺と，正方形の対角線が直角をなす直角三角形）

立方体の辺が 12 通り，それと直交する対角線が各 2 通り，よって$12\times 2 = 24$通り

面積は$\sqrt{2}\times 2\times\dfrac{1}{2} = \sqrt{2}$

(iii)　三角形 ABC と合同な三角形（正方形を対角線で分けた直角二等辺三角形）

立方体の面が 6 通り，各面に対角線を 1 本引いてできる直角三角形が各 4 通り，よって$6\times 4 = 24$通り

面積は$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2} = 1$

(i)～(iii)でできる三角形の総数は$8+24+24 = 56$通りであるから，これら以外の三角形はできない.

したがって，事象Vに含まれるすべての三角形の面積の平均値は

$$\left(\sqrt{3}\times 8+\sqrt{2}\times 24+1\times 24\right)\div 56 = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}+3}{7}}$$（チ）

〔III〕

(1) $y=f(x)$ を a について整理すると

$$(x+2)^2a+(x^3+4x^2+6x+2-y)=0 \qquad \cdots\cdots①$$

となり, これが任意の実数 a に対して成り立つ条件は

$$\begin{cases}(x+2)^2=0\\ x^3+4x^2+6x+2-y=0\end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$$

であるから, 点 P の座標は

$$\boxed{(-2,\ -2)}\ (\text{ツ}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である. また

$$f'(x)=3x^2+2(a+4)x+4a+6 \qquad \cdots\cdots①$$

より $f'(-2)=2$ であるから, 点 P における接線の方程式は

$$y=2(x+2)-2 \quad \text{すなわち} \quad y=\boxed{2x+2}\ (\text{テ})$$

である.

(2) $a=5$ のとき, ②より

$$f'(x)=3x^2+18x+26=3(x+3)^2-1$$

であるから, $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾き $f'(x)$ は

$$x=\boxed{-3}\ (\text{ト})$$

において最小になる.

(3) $x=-3$ において $f(x)$ が極値をもつならば, $f'(-3)=0$ である. ②より $f'(-3)=-2a+9$ であるから

$$a=\frac{9}{2}$$

である. 逆に $a=\dfrac{9}{2}$ のとき, ②より

$$f'(x)=3x^2+17x+24=(x+3)(3x+8)$$

であるから, $f'(x)$ は $x=-3$ の前後で符号変化する. よって, $f(x)$ は $x=-3$ で極値をとるから

$$a=\boxed{\frac{9}{2}}(\text{ナ})$$

である.

$y=f(x)$ すなわち①と $y=2x+2$ を連立して y を消去すると

$$(x+2)^2a+\{x^3+4x^2+6x+2-(2x+2)\}=0 \iff a(x+2)^2+x(x+2)^2=0$$

$$\iff (x+a)(x+2)^2=0 \iff x=-a,\ -2$$

となる. よって, 点 Q の座標は $(-a,\ 2(-a)+2)$, すなわち

$$\left(-\frac{9}{2},\ -7\right)$$

である. また

$$f(x)=(x+a)(x+2)^2+2x+2$$

より

$$f(-3)=\left(-3+\frac{9}{2}\right)(-3+2)^2+2\cdot(-3)+2=\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-6+2=-\frac{5}{2}$$

であるから, S の座標は

$$\left(-3,\ -\frac{5}{2}\right)$$

である. よって, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(-\frac{5}{2},\ -5\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$ であるから, 三角形 SPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\left(-\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)\times(-5)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{15}{4}\right|=\boxed{\frac{15}{8}}\ (\text{ニ})$$

である.