2021年度 慶應義塾大学 理工学部 数学

1

【解答】

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)	(カ)
$(1, 2)$	1	-2	$0,\ 2,\ 3$	-1	$4+\sqrt{22}$

【解説】

(1)　直線 l の方程式を t について整理すると

$$(2x-y)t^2-4(x-1)t+2(x-y+1)=0$$

となる．これが t の値によらず成り立つ条件は

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

である．これを満たす $x,\ y$ として

$$x=1,\ y=2$$

が定まるので, 直線 l は t の値によらず定点

$$(1, 2) \qquad \cdots\cdots(ア)$$

を通る．

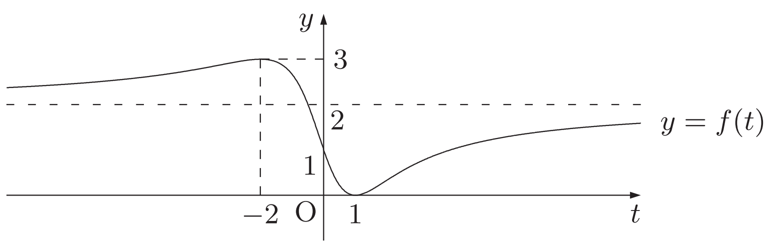
(2)　$f(t)=\dfrac{2(t-1)^2}{t^2+2}$ であるから

$$f'(t)=2\cdot\frac{2(t-1)(t^2+2)-(t-1)^2\cdot 2t}{(t^2+2)^2}$$
$$=\frac{4(t-1)(t+2)}{(t^2+2)^2}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2-\dfrac{4}{t}+\dfrac{2}{t^2}}{1+\dfrac{2}{t^2}}=2$$

となるので, $f(t)$ の増減は下のようになる．

t	$(-\infty)$	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	(2)	↗	3	↘	0	↗	(2)



よって, $y=f(t)$ のグラフは上のようになるから, $f(t)$ の値が最小となるのは

$$t=1 \qquad \cdots\cdots(\text{イ})$$

のときであり, 最大となるのは

$$t=-2 \qquad \cdots\cdots(\text{ウ})$$

のときである.

また, 方程式 $f(t)=a$ の実数解の個数は $y=f(t)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数と一致するので, 方程式 $f(t)=a$ がちょうど 1 個の実数解をもつような a の値をすべて求めると

$$a=0,2,3 \qquad \cdots\cdots(\text{エ})$$

である.

(3) (2) より $0 \leqq f(t) \leqq 3$ である. これと (1) より, 領域 S は図の斜線部分 (境界線上の点を含む) である.

放物線 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2+\frac{1}{2}(k-1)^2$ を C とする. C の頂点は放物線 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 上を動く. C が直線 $y=2$ と接するための条件は, C の頂点の y 座標が 2 となることであるから, このような k の値は

$$\frac{1}{2}(k-1)^2=2$$
$$\therefore \quad k=-1,3$$

である.

また, C が直線 $y=3x-1$ と接するための条件は, x の 2 次方程式

$$\frac{1}{2}(x-k)^2+\frac{1}{2}(k-1)^2=3x-1, \text{ すなわち } \frac{1}{2}x^2-(k+3)x+k^2-k+\frac{3}{2}=0$$

が重解をもつことであるから, このような k の値は

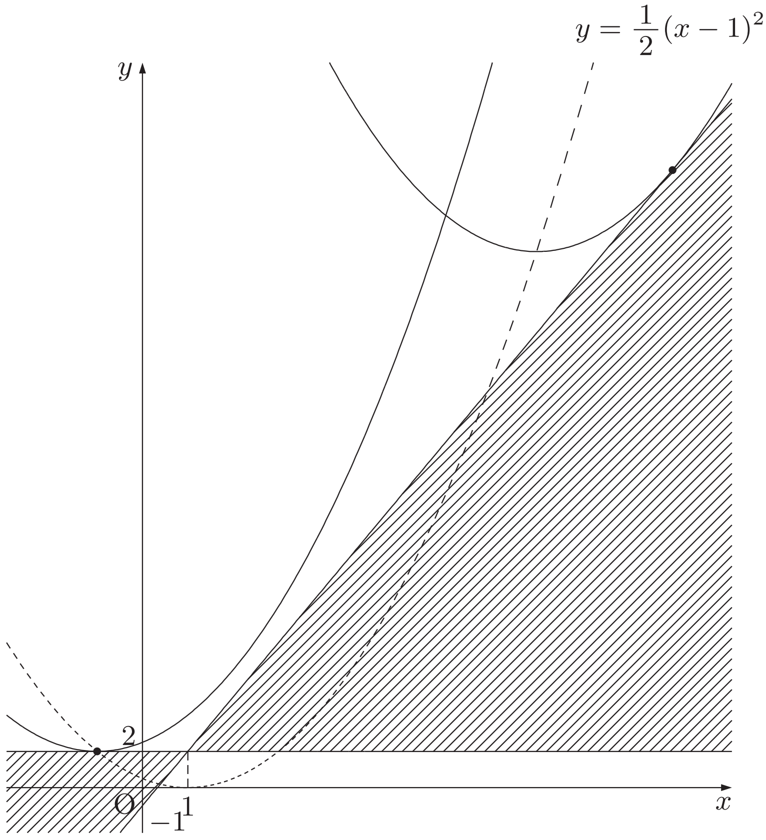
$$(-k-3)^2-2\left(k^2-k+\frac{3}{2}\right)=0$$
$$\therefore \quad k^2-8k-6=0$$
$$\therefore \quad k=4\pm\sqrt{22}$$

である.

以上と C の動き方を考えて, 下の図から視覚的に考察することにより, C が領域 S と共有点を持つような k の値の範囲は

$$-1 \leqq k \leqq 4+\sqrt{22} \qquad \cdots\cdots(\text{オ})\ (\text{カ})$$

である.



$y = \frac{1}{2}(x-1)^2$
y
x
2
O
-1
1

2

[解答]

(キ)	(ク)	(ケ)	(コ)
-1	x^3+4x^2+4x+1	$x+1$	$-x-2$

[解説]

(1)　α は,

$$\alpha^2+3\alpha+3=0$$

を満たす.

$$\begin{aligned}(\alpha+1)^2(\alpha+2)^5&=\{(\alpha+1)(\alpha+2)\}^2(\alpha+2)^3\\&=(\alpha^2+3\alpha+2)^2(\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8)\\&=\{(\alpha^3+3\alpha+3)-1\}^2\{(\alpha^2+3\alpha+3)(\alpha+3)-1\}\\&=(-1)^2(-1)\\&=-1\end{aligned}$$　$\cdots\cdots$ (キ)

である.

次に, $\alpha=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$ であるから,

$$\alpha+2=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\alpha+3=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\pm i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

(この 2 式の複号はすべて同順)

よって,

$$(\alpha+2)^s(\alpha+3)^t=(\sqrt{3})^t\left\{\cos\left(\pm\left(\frac{\pi}{3}s+\frac{\pi}{6}t\right)\right)+i\sin\left(\pm\left(\frac{\pi}{3}s+\frac{\pi}{6}t\right)\right)\right\}$$

であるから, $(\alpha+2)^s(\alpha+3)^t=3$ となる条件は,

$$(\sqrt{3})^t=3 \quad かつ \quad \pm\left(\frac{\pi}{3}s+\frac{\pi}{6}t\right)=2n\pi \quad (n\ は整数)$$

$$\therefore\quad t=2 \quad かつ \quad s+1=\pm 6n$$

したがって,

$$s=6k-1,\ t=2 \quad (k\ は整数)$$　$\cdots\cdots$ (答)

がすべての組である.

(2)　$P(x)=x^2+3x+3$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
(x+1)^3(x+2)^2 &= (x^3+3x^2+3x+1)(x^2+4x+4) \\
&= \{xP(x)+1\}(x^2+4x+4) \\
&= P(x)(x^3+4x^2+4x)+(x^2+3x+3)+(x+1) \\
&= P(x)(x^3+4x^2+4x+1)+(x+1)
\end{aligned}
$$

であるから, $(x+1)^3(x+2)^2$ を x^3+3x+3 で割ったときの,

商は　x^3+4x^2+4x+1　　　$\cdots\cdots$ (ク)

余りは　$x+1$　　　$\cdots\cdots$ (ケ)

である.

(注)

$$(x+1)^3(x+2)^2 = x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+4$$

であるので, これを実際に x^2+3x+3 で割って, 商と余りを求めてもよい. 実際,

$$(x+1)^3(x+2)^2 = (x^2+3x+3)(x^3+4x^2+4x+1)+(x+1)$$

のようになる.

次に, $(x+1)^{2001}$ を x^2+3x+3 で割った余りを求める.

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2021} &= \{(x+1)^3\}^{673}(x+1)^2 \\
&= \{xP(x)+1\}^{673}(x^2+2x+1) \\
&= \{P(x)\times(\text{多項式})+1\}\{P(x)-(x+2)\} \\
&= P(x)\times(\text{多項式})-(x+2)
\end{aligned}
$$

となるから, $(x+1)^{2001}$ を x^2+3x+3 で割った余りは,

$-x-2$　　　$\cdots\cdots$ (答)

である.

[別解]

$\beta=\alpha+2$ とおくと, $\alpha^2+3\alpha+3=0$ より,

$$
\begin{aligned}
&(\beta-2)^2+3(\beta-2)+3=0 \\
&\therefore\quad \beta^2-\beta+1=0 \qquad\cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

したがって,

$$\beta^3+1=(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0 \qquad \therefore\quad \beta^3=-1 \qquad\cdots\cdots ②$$

また, ① より,

$$
\begin{aligned}
(\alpha+1)^2 &= (\beta-1)^2=\beta^2-2\beta+1=-\beta \\
(\alpha+3)^2 &= (\beta+1)^2=\beta^2+2\beta+1=3\beta
\end{aligned}
$$

が成立し, ここから, $|\beta|=1$ ($\because$ ②) を用いると,

$$|\alpha+1|=\sqrt{|-\beta|}=1$$
$$|\alpha+3|=\sqrt{|3\beta|}=\sqrt{3}$$

が成り立つ.

(1)
$$\begin{aligned}(\alpha+1)^2(\alpha+2)^5 &= -\beta\cdot\beta^5=-(\beta^3)^2\\ &= -(-1)^2\\ &= -1 \qquad\cdots\cdots\text{(キ)}\end{aligned}$$

次に,

$$(\alpha+2)^s(\alpha+3)^t=3 \qquad\cdots\cdots③$$

より,

$$|\alpha+2|^s\,|\alpha+3|^t=3$$
$$\therefore\quad 1^s\cdot(\sqrt{3})^t=3$$
$$\therefore\quad t=2$$

このとき, ③ は,

$$\beta^s\cdot 3\beta=3$$
$$\therefore\quad \beta^{s+1}=1 \qquad\cdots\cdots④$$

① より,

$$\beta=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから, ④ を満たす整数 s は, $s+1=(6$ の倍数$)$ より,

$$s=6k-1\ (k\ \text{は整数})$$

である.

以上より,

$$s=6k-1,\quad t=2\quad (k\ \text{は整数}) \qquad\cdots\cdots\text{(答)}$$

がすべての組である.

(2) $P(x)=(x+1)^{2021}$ とおき, $P(x)$ を $x^2+3x+3=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りは $px+q$ とおくと,

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})Q(x)+px+q \qquad\cdots\cdots⑤$$

が成り立つ.

$(\alpha+1)^3=1$ に注意すると,

$$\begin{aligned}P(\alpha)&=(\alpha+1)^{2021}\\ &=\{(\alpha+1)^3\}^{673}(\alpha+1)^2=(\alpha+1)^2\\ &=(\alpha^2+3\alpha+3)-\alpha-2\end{aligned}$$

$$= -\alpha - 2$$

であり, 同様に, $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = -\overline{\alpha} - 2$ であるから, ⑤ に $x = \alpha, \overline{\alpha}$ を代入して,

$$p\alpha + q = -\alpha - 2, \quad p\overline{\alpha} + q = -\overline{\alpha} - 2$$

$$\therefore \quad p = -1,\ q = -2$$

したがって, $P(x)$ を $x^2 + 3x + 3$ で割った余りは,

$$-x - 2 \qquad \cdots\cdots \text{(コ)}$$

である.

3

[解答]

(サ)	(シ)	(ス)	(セ)	(ソ)
$\dfrac{4}{27}$	$\dfrac{5}{6}$	$n-1$	$\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^k$	8

[解説]

さいころを1個投げて5以上の目が出ることを○，5未満の目が出ることを×で表すこととする．

○となる確率は $\dfrac{1}{3}$，×となる確率は $\dfrac{2}{3}$ であることに注意する．

(1) $n=1$ のとき $2n+1=3$ である．最大3回までさいころを投げて，×が 1個となるのは，次の ①，② の2通りである．

①

1	2	3
×	○	○

②

1	2	3
○	×	○

よって，求める確率は，

$$2\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{27} \qquad \cdots\cdots(\text{サ})$$

である．

(2) $n=2$ のとき $2n+1=5$ である．最大5回までさいころを投げて，×が 2個となるのは，次の ③ から ⑥ の4通りである．

③

1	2	3	4
×	×	○	○

④

1	2	3	4	5
×	○	×	○	○

⑤

1	2	3	4	5
○	×	×	○	○

⑥

1	2	3	4	5
○	×	○	×	○

これより，

$$\begin{aligned}P(B_2)&=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\\&=\frac{8}{81}\end{aligned}$$

となる．

一方，③ から ⑤ では，事象 A が成立しているので，

$$\begin{aligned}P(A\cap B_2)&=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\\&=\frac{20}{243}\end{aligned}$$

である．

よって，求める確率は，

$$P_{B_2}(A) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{20}{243}}{\frac{8}{81}} = \frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots(\text{シ})$$

である．

(3)　×が k 回だけ起こるとき，○が 2 回連続するまでの繰り返す回数のとり得る値は $2k+2$ 以下である．よって，$P_{B_K}(A) = 1$ となるための条件は，

$k \geqq 0$　かつ　$2k+2 \leqq 2n+1$

つまり，

$0 \leqq k \leqq n - \frac{1}{2}$

であるから，

$$K_n = n - 1 \qquad \cdots\cdots(\text{ス})$$

である．

(注)　実際，$k = n$ のとき事象 A が成立しない次のような場合が存在する．

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$
○	×	○	×	○	×	$\cdots$	○	×	○

(4)　$0 \leqq k \leqq K_n$ のとき，(3) より B_k が起こったという条件のもとで事象 A は必ず成立するので最後の 2 回は○○で終了する．

C_k ：「×が k 回で，最後の 2 回のみ○が連続する」

とおくと，$p_k = P(C_k)$ である．

$0 \leqq k \leqq K_n - 1$ のとき，C_{k+1} が起こるのは，

$$\begin{cases} 1\text{ 回目が×で，その後 } C_k \text{ が起こる．} \\ 1\text{ 回目が○, 2 回目が×で，その後 } C_k \text{ が起こる．} \end{cases}$$

のいずれかであり，これらは排反であるから，

$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}p_k$$

$$= \frac{8}{9}p_k \qquad (0 \leqq k \leqq n-2) \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．C_0 は最初の 2 回が○○となる場合だけであるから，

$$p_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

となるので，$(*)$ より，

$$p_k = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^k \qquad (0 \leqq k \leqq n-1) \qquad \cdots\cdots(\text{セ})$$

である．

また．$a=\dfrac{1}{9}, r=\dfrac{8}{9}$ とおくと，

$$S_n=a\sum_{k=0}^{n-1}kr^k$$
$$=a\{1\cdot r+2\cdot r^2+3\cdot r^3+4\cdot r^4+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}\} \qquad \cdots\cdots Ⓐ$$

となる．Ⓐ の両辺に r をかけて

$$rS_n=a\{1\cdot r^2+2\cdot r^3+3\cdot r^4+\cdots\cdots+(n-2)r^{n-1}+(n-1)r^n\} \qquad \cdots\cdots Ⓑ$$

となる．Ⓐ $-$ Ⓑ より

$$(1-r)S_n=a\{r+r^2+r^3+r^4+\cdots\cdots+r^{n-1}-(n-1)r^n\}$$

となる．$1-r=a$ であり，$0<r<1$ であるから，

$$S_n=r\cdot\frac{1-r^{n-1}}{1-r}-(n-1)r^n$$
$$\to\frac{r}{1-r}=8 \quad (n\to\infty) \qquad \cdots\cdots(ソ)$$

である．

[別解]

(4)　×が k 回であることに注意すれば，

$$\wedge\underbrace{\times\ \wedge\times\ \wedge\times\ \wedge\cdots\cdots\times\ \wedge\times\ \wedge\times}_{k\text{ 回}}○○$$

として，

$$\left\{\begin{array}{l}\Lambda\text{になにも入れない場合.}\\ \Lambda\text{のうちの 1 箇所に○を入れる場合.}\\ \Lambda\text{のうちのいずれか 2 箇所に○を入れる場合.}\\ \Lambda\text{のうちのいずれか 3 箇所に○を入れる場合.}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \Lambda\text{の } k \text{ 箇所すべてに○を入れる場合.}\end{array}\right.$$

を考えればよいので，

$$p_k=P(A\cap B_k)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^2\left\{1+{}_k\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)+{}_k\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_k\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^k$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^k \qquad \cdots\cdots(セ)$$

である．

4

［解答］

（タ）	（チ）	（ツ）
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{k}{n}-\log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right\}$	$\dfrac{3}{4}-\log 2$

［(1)の記述解答と(2)，(3)の解説］

(1)　$f(x)=\log(1+ax)-a\left(x-\dfrac{x^2}{4}\right)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-a\left(1-\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{2a-a(2-x)(1+ax)}{2(1+ax)}$$
$$=\frac{ax\{ax-(2a-1)\}}{2(1+ax)} \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

であり，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ ゆえ $2a-1\leqq 0$ であることに注意すると，①より，

$x\geqq 0$ において，$f'(x)\geqq 0$

であるから，

$x\geqq 0$ において，$f(x)$ は増加関数である．　………②

②と $f(0)=0$ であることから，

$x\geqq 0$ において，$f(x)\geqq 0$

であり，それゆえ，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のもとでは，$x\geqq 0$ の範囲で不等式

$$a\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\leqq\log(1+ax)$$

が成り立つ．

（証明終わり）

(2)　$x=0$ のときは，b によらず

$$\log\left(1+\frac{1}{2}x\right)\leqq bx \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

が成り立つので，以下 $x>0$ のもとで b の最小値を求めればよい．

$x>0$ のもとでは，③は

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{x}\leqq b \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

と同値であり，$x>0$ において④がつねに成り立つような b の最小値を求めればよい．

そこで，④の左辺を $F(x)$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}x}\cdot x-\left\{\log\left(1+\frac{1}{2}x\right)\right\}\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{2+x}-\log\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{x^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

であり，⑤の分子を $g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1\cdot(2+x)-x\cdot 1}{(2+x)^2}-\frac{1}{2+x}$$

$$=\frac{2-(2+x)}{(2+x)^2}$$

$$=\frac{-x}{(2+x)^2}$$

であるから，

$x>0$ において，$g'(x)<0$ ゆえ，$g(x)$ は減少関数である．

このことと，$g(0)=0$ および $g(x)$ は $x=0$ で連続であることから，

$x>0$ において，$g(x)<0$

であり，これと⑤より，

$x>0$ において，$F'(x)<0$

であるから，

$x>0$ において，$F(x)$ は減少関数である．　　　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$⑥

よって，④と⑥より，求める b の最小値は，

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（タ）$$

である．

(注)　$h(x)=\log\left(1+\frac{1}{2}x\right)$ とおくと，$h'(x)=\dfrac{1}{2+x}$ で，

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

$$=h'(0)$$

$$=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（タ）$$

である．

また，$F(x)=\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$ が原点と点 $(x\,,\,h(x))$ を通る直線の傾きであることから，

視察によっても（タ）は$h'(0)=\dfrac{1}{2}$とわかる．

(3)　$t\to+0$ を考えるので$t>0$ としてよく，このもとでは$0\leqq x\leqq\dfrac{k}{n}$において，$tx\geqq 0$であるから，(1)，(2)により，

$$\frac{1}{2}\left\{tx-\frac{(tx)^2}{4}\right\}\leqq\log\left(1+\frac{1}{2}tx\right)\leqq\frac{1}{2}tx$$

が成り立つ．各辺を$t(1+x)$（>0）で割ると，

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x}-\frac{tx^2}{4(1+x)}\right\}\leqq\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}tx\right)}{1+tx}\leqq\frac{x}{2(1+x)}$$

を得るので，$x=0$ から$x=\dfrac{k}{n}$まで各辺を積分することにより，

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{x}{1+x}dx-\frac{t}{4}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{x^2}{1+x}dx\right)\leqq\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}tx\right)}{1+tx}dx\leqq\frac{1}{2}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{x}{1+x}dx\quad\cdots\cdots⑦$$

を得る．

よって，$t\to+0$ のとき，

$$\begin{aligned}(⑦\text{の両端})\to\frac{1}{2}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{x}{1+x}dx&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{k}{n}}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\Big[x-\log|1+x|\Big]_0^{\frac{k}{n}}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{k}{n}-\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\end{aligned}$$

であるから，はさみうちの原理により，

$$I(n\,,k)=\frac{1}{2}\left\{\frac{k}{n}-\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（チ）}$$

である．

また，区分求積法により，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(n\,,k)&=\frac{1}{2}\int_0^1\{x-\log(1+x)\}dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-(1+x)\log(1+x)+x\right]_0^1\\&=\frac{3}{4}-\log 2\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（ツ）}\end{aligned}$$

である．

5

［解答］

（テ）	（ト）	（ナ）	（ニ）	（ヌ）
$a+b$	$a-b$	$-\dfrac{\pi}{4}$	x^2+y^2-y	$6+2\sqrt{5}$

［解説］

(1)　$\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ であるから，$a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{u}+t\vec{n}$ の成分を考えて，

$$\begin{cases}1=sa-tb\\ 1=sb+ta\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{cases}s=a+b\\ t=a-b\end{cases}\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{テ})(\text{ト})$$

(2)　(1)の結果は$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のときも成立する．

(1)の結果のs，tを用いると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{u}$であるから，

$$\mathrm{PQ}=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|t\vec{n}\right|=\left|t\right|\left|\vec{n}\right|$$
$$=\left|a-b\right|=\left|\cos\theta-\sin\theta\right|=\left|\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される．

ここで，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$のとき，

$$-\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3\pi}{4}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より，線分PQの長さは，

$$\theta+\frac{\pi}{4}=0,\ \text{すなわち},\ \theta=-\frac{\pi}{4}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ナ})$$

のとき最大となる．

(3)　(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{u}=(a+b)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\text{ の }\vec{u}\text{ 上への正射影})$$
$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|^2}\vec{u}=(-3a+b)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

であるから，$\mathrm{T}(x\,,\,y)$とおくと，③，④より，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{4}$の成分を考えて，

$$\begin{cases} x = \dfrac{3(a+b)a+(-3a+b)a}{4} = ab = \dfrac{\sin 2\theta}{2} \\ y = \dfrac{3(a+b)b+(-3a+b)b}{4} = b^2 = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

と表される．

θ が $-\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たしながら動くとき，2θ は

$$-\pi < 2\theta \leqq \pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

を満たしながら動くので，$\mathrm{T}(x, y)$ の軌跡は

「⑤かつ⑥を満たす θ が存在する」 ………………Ⓐ

ような点 (x, y) 全体の集合である．

⑤より，

$$\sin 2\theta = 2x \quad \text{かつ} \quad \cos 2\theta = 1 - 2y$$

を得るので，⑥が一周期分であることに注意すると，

$$\text{Ⓐ} \iff (1-2y)^2 + (2x)^2 = 1$$
$$\iff x^2 + y^2 - y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots（ニ）$$

であり，これが軌跡の方程式である．

(注) ⑤より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\right\}$$

と表されるので，⑥に注意すると，Tの軌跡は「中心 $(0,1)$，半径 1 の円を原点を中心に $\dfrac{1}{2}$ 倍に相似拡大して得られる円」である．このことから結果を得ることができる．

(4) (2)，(3)より，

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 + \mathrm{RS}^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|^2 \\ &= \left|a - b\right|^2 + \left|a + 3b\right|^2 \\ &= 2a^2 + 4ab + 10b^2 \\ &= 2 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} + 10 \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= 6 - 2(2\cos 2\theta - \sin 2\theta) \\ &= 6 - 2\sqrt{5}\cos(2\theta + \alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑦ \end{aligned}$$

と表される．ただし，α は θ によらない定角である．

よって，⑥と⑦より，$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{RS}^2$ の最大値は，

$$6 + 2\sqrt{5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots（ヌ）$$

である．