2021年度 慶應義塾大学 経済学部 数学

〔1〕

(1)	(2)	(3)(4)	(5)(6)	(7)(8)	(9)	(10)(11)(12)	(13)	(14)(15)
1	3	48	-3	19	8	195	2	24

(16)
7

(1) 2 円が外接する条件は (2 円の中心間距離) $=$ (2 円の半径の和) であるから, C_1 と C_3 が外接することより

$$\sqrt{a^2+b^2}=r+2 \quad \text{すなわち} \quad a^2+b^2=(r+2)^2 \qquad \cdots\cdots①$$

であり, C_2 と C_3 が外接することより

$$\sqrt{(a-7)^2+b^2}=r+3 \quad \text{すなわち} \quad (a-7)^2+b^2=(r+3)^2 \qquad \cdots\cdots②$$

である. r の動く範囲は

①かつ②を満たす実数 $a,\ b$ が存在する

すなわち

ab 平面上で円①と円②が共有点をもつ $\cdots\cdots(*)$

という条件より求まる. 円①の中心は原点で半径は $r+2$, 円②の中心は点 $(7,\ 0)$ で半径は $r+3$ であるから, (半径の差) $\leqq$ (中心間の距離) $\leqq$ (半径の和) より

$$(*) \iff |(r+2)-(r+3)| \leqq 7 \leqq (r+2)+(r+3) \iff r \geqq 1 \qquad \cdots\cdots③$$

である. よって, r の最小値は

1 $\cdots\cdots$(答)

である. また, ① $-$ ② より

$$14a-49=-2r-5 \quad \text{すなわち} \quad r=22-7a \qquad \cdots\cdots④$$

であり, ③, ④より a の変域は

$$22-7a \geqq 1 \quad \text{すなわち} \quad a \leqq 3$$

であるから, a の最大値は

3 $\cdots\cdots$(答)

である.

(2) ④を①に代入して整理すると

$$b^2=48(a-3)(a-4) \qquad \cdots\cdots⑤(\text{答})$$

となる.

(3) C_3 が直線 $x=-3$ に接するとき, C_3 が C_1 に外接することも考えると, C_3 の中心は直線 $x=-3$ の右側にある. よって, $r=a-(-3)$ が成り立つので, これと④より

$$a=\frac{19}{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である. これを⑤に代入すると $b^2=\dfrac{195}{4}$ となるので

$$|\,b\,|=\frac{\sqrt{195}}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(4) 点 $(a,\ b)$ と原点を通る直線と, 点 $(a,\ b)$ と点 $(7,\ 0)$ を通る直線が直交するので

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a-7 \\ b \end{pmatrix}=0 \quad \text{すなわち} \quad a^2-7a=-b^2 \qquad \cdots\cdots⑥$$

である. ⑤は

$$b^2=48(a^2-7a+12)$$

と変形できるので, ⑥を代入すると

$$b^2=48(-b^2+12) \quad \text{すなわち} \quad b^2=\frac{48\cdot 12}{49}=\left(\frac{24}{7}\right)^2$$

となる. よって

$$|\,b\,|=\frac{24}{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

[2]

(17)	(18)	(19)	(20)(21)	(22)(23)	(24)(25)	(26)(27)	(28)	(29)
6	7	9	93	57	12	31	8	4

(30)	(31)	(32)
8	4	9

(1) さいころを投げる回数を N, 得点を X とする.

(a) のときは

$$\begin{cases} N = 10 \\ X = 0 \end{cases}$$

であるから, $X \neq 49$ である.

(b) のときは, $m+2$ 回目から $m+n+1$ 回目に出る目を順に $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ とすると

$$\begin{cases} N = m+1+n \\ X = m+n+a_1+a_2+\cdots+a_n \end{cases}$$

である. X は $m=9,\ n=6,\ a_1=a_2=\cdots=a_n=6$ のとき最大値

$$9+6+6\times 6 = 51$$

をとる. $n \leqq 5$ を仮定すると

$$X \leqq 9+5+6\times 5 = 44 < 49$$

であるから, $X=49$ のとき $n=6$ に限られる. よって

$$\begin{cases} N = m+7 \\ X = m+6+a_1+a_2+\cdots+a_6 \end{cases}$$

であり, さらに, $m \leqq 6$ を仮定すると

$$X \leqq 6+6+6\times 6 = 48 < 49$$

であるから, $X=49$ のとき $m \geqq 7$ に限られる. $m=7,\ 8,\ 9$ のそれぞれに対して $X=49$ となる $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ は存在するから

$n=6$ ……(答)

であり, m の取り得る値の範囲は

$7 \leqq m \leqq 9$ ……(答)

である. よって, $X=49$ となるのは次のいずれかの場合である.

(i) $m=7$ かつ $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ はすべて 6

(ii) $m=8$ かつ $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ の 1 つが 5 で残りは 6

(iii) $m=9$ かつ $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ の 1 つが 4 で残りは 6

(iv) $m=9$ かつ $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ の 2 つが 5 で残りが 6

(i)〜(iv) は排反なので

$$
\begin{aligned}
P(X=49) &= \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 + \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \frac{1}{6} \cdot {}_6\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \\
&\quad + \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6} \cdot {}_6\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^5 + \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6} \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\
&= \frac{6^2+6^2+6+15}{6^{16}} = \frac{93}{6^{16}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である. また, $N=m+7$ より

$$N \geqq 15 \text{ かつ } X=49 \iff m \geqq 8 \text{ かつ } X=49$$

であり, これが起こるのは, (ii), (iii), (iv) のいずれかの場合である. よって

$$P(N \geqq 15 \text{ かつ } X=49) = \frac{6^2+6+15}{6^{16}} = \frac{57}{6^{16}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である. また

$$N \leqq 14 \text{ かつ } X=49 \iff m \leqq 7 \text{ かつ } X=49$$

であり, これが起こるのは (i) の場合であるから

$$P(N \leqq 14 \text{ かつ } X=49) = \frac{6^2}{6^{16}} = \frac{36}{6^{16}}$$

である. よって

$$P_{X=49}(N \leqq 14) = \frac{P(N \leqq 14 \text{ かつ } X=49)}{P(X=49)} = \frac{\frac{36}{6^{16}}}{\frac{93}{6^{16}}} = \frac{12}{31} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) $N \geqq 15$ となるのは次の 2 つの場合である.

- $m=8$ かつ $n=6$ ($a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ は任意)
- $m=9$ かつ $n=5,\ 6$ ($a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ は任意)

これらは排反なので

$$P(N \geqq 15) = \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{2}{6} = \frac{6+2}{6^{10}} = \frac{8}{6^{10}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり

$$P(N \leqq 14) = 1 - P(N \geqq 15) = 1 - \frac{8}{6^{10}}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
P_{N \leqq 14}(X=49) &= \frac{P(N \leqq 14 \text{ かつ } X=49)}{P(N \leqq 14)} \\
&= \frac{\frac{36}{6^{16}}}{1-\frac{8}{6^{10}}} = \frac{1}{6^4(6^{10}-8)} \quad (\text{よって } k=4) \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.

(3) $X=0$ となるのは (a) のときであるから, $P(X=0)=\left(\frac{1}{6}\right)^{10}=\frac{1}{6^{10}}$ である. よって

$$\begin{aligned}P(X>0 \text{ かつ } N \leqq 14) &= 1-P(X=0 \text{ または } N \geqq 15)\\ &= 1-\{P(X=0)+P(N \geqq 15)-P(X=0 \text{ かつ } N \geqq 15)\}\\ &= 1-\left(\frac{1}{6^{10}}+\frac{8}{6^{10}}-0\right)=1-\frac{9}{6^{10}}\end{aligned}$$

であり

$$P(X>0 \text{ かつ } N \leqq 14 \text{ かつ } X=49)=P(N \leqq 14 \text{ かつ } X=49)=\frac{36}{6^{16}}$$

であるから

$$\begin{aligned}P_{X>0 \text{ かつ } N \leqq 14}(X=49) &= \frac{P(X>0 \text{ かつ } N \leqq 14 \text{ かつ } X=49)}{P(X>0 \text{ かつ } N \leqq 14)}\\ &= \frac{\frac{36}{6^{16}}}{1-\frac{9}{6^{10}}}=\frac{1}{6^4(6^{10}-9)} \quad (\text{よって } l=4) \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である.

[3]

(33)	(34)	(35)(36)	(37)(38)	(39)	(40)	(41)	(42)	(43)	(44)
1	4	40	10	2	1	3	4	1	2

(45)	(46)	(47)	(48)	(49)(50)	(51)	(52)	(53)	(54)(55)
0	1	2	6	60	1	2	1	12

(1) $(*)$ で $n=1$ とし, $S_1=a_1$ と $a_2=1$ を代入すると

$S_1=-a_2$　すなわち　$a_1=-1$　……(答)

となる. $(*)$ で $n=4,\ 5$ とすると

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{25}{2}a_5 \\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=27a_6 \end{cases}$$

となり, $a_1+a_2=0$ と $a_6=2$ を代入すると

$$\begin{cases} a_3+a_4=\dfrac{25}{2}a_5 \\ a_3+a_4+a_5=54 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a_3+a_4=50 \\ a_5=4 \end{cases}$$　……(答)

となる. さらに $(*)$ で $n=3$ とすると

$a_1+a_2+a_3=4a_4$　すなわち　$a_3=4a_4$

となるので, これと $a_3+a_4=50$ より

$a_3=40,\quad a_4=10$　……(答)

である.

(2) $n \geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$ であるから

$$a_n=\frac{(n-2)(n+1)^2}{4}a_{n+1}-\frac{(n-3)n^2}{4}a_n$$

すなわち

$(n-2)(n+1)^2a_{n+1}=(n^3-3n^2+4)a_n$　……(答)

である. これは

$$(n-2)(n+1)^2a_{n+1}=(n+1)(n-2)^2a_n$$

と変形できるので, $n \geqq 3$ ならば両辺を $(n-2)(n+1)$ で割れて

$(n+1)a_{n+1}=(n-2)a_n$　……(答)

となる. さらに, 両辺に $n(n-1)$ をかけると

$$(n+1)n(n-1)a_{n+1}=n(n-1)(n-2)a_n$$

となる. よって, $b_n=n(n-1)(n-2)a_n$ とおくと $b_{n+1}=b_n$ が成り立つので

$r=0,\ s=1,\ t=2$　……(答)

とすればよい. $b_{n+1}=b_n\ (n \geqq 3)$ より $n \geqq 3$ のとき

$b_n=b_3=6a_3$　すなわち　$a_n=\dfrac{6a_3}{n(n-1)(n-2)}$　……(答)

である.

(3) まず, $S_1 = a_1 = -1 < 59$ である.

また, $n \geqq 2$ のとき $n+1 \geqq 3$ であるから, (2) より

$$a_{n+1} = \frac{6a_3}{(n+1)n(n-1)} = \frac{240}{(n+1)n(n-1)}$$

である. これを $(*)$ に代入すると

$$S_n = \frac{(n-2)(n+1)^2}{4} \cdot \frac{240}{(n+1)n(n-1)} = \frac{60(n-2)(n+1)}{n(n-1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となるから

$$S_n \geqq 59 \iff 60(n^2-n-2) \geqq 59(n^2-n) \iff n(n-1) \geqq 120 \qquad \cdots\cdots①$$

である. $c_n = n(n-1)$ とおくと, $\{c_n\}$ は $n \geqq 2$ で増加し

$$c_{11} = 110, \quad c_{12} = 132$$

であるから, ① $\iff n \geqq 12$ である.

以上より, $S_n \geqq 59$ となる最小の n は

$$n = 12 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

［4］

(1) $(\star)$ において, 真数条件より

$$\begin{cases} x>0 \\ 6x-5^k>0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad x>\frac{5^k}{6} \qquad \cdots\cdots①$$

であり, このもとで

$$\begin{aligned}(\star) &\iff 2\log_5 x<\log_5(6x-5^k)+\log_5 5^{k-1} \\ &\iff \log_5 x^2<\log_5\{(6x-5^k)\cdot 5^{k-1}\} \\ &\iff x^2<(6x-5^k)\cdot 5^{k-1}\ (\because (\text{底})=5>1) \\ &\iff x^2-6\cdot 5^{k-1}+5(5^{k-1})^2<0 \\ &\iff (x-5^{k-1})(x-5\cdot 5^{k-1})<0 \\ &\iff 5^{k-1}<x<5^k \qquad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

であるから

$$(\star) \iff ①\text{かつ}② \iff 5^{k-1}<x<5^k \qquad \cdots\cdots③(\text{答})$$

である.

(2) ③を満たす整数 x は

$$x=5^{k-1}+1,\ 5^{k-1}+2,\ 5^{k-1}+3,\ \cdots,\ 5^k-1$$

であり, その個数は

$$(5^k-1)-(5^{k-1}+1)+1=4\cdot 5^{k-1}-1$$

である. ここで, $5^{k-1}+1$ と 5^k-1 はともに偶数なので, ③を満たす奇数 x の個数 a_k は

$$a_k=\frac{(4\cdot 5^{k-1}-1)-1}{2}=2\cdot 5^{k-1}-1$$

である. よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2\cdot 5^{k-1}-1)=\frac{2(5^n-1)}{5-1}-n=\frac{5^n-1}{2}-n \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(3) $T_n=S_n+n$ とおくと, $T_n=\dfrac{5^n-1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}T_n\text{が 10 桁の整数となる} &\iff 10^9\leqq T_n<10^{10} \\ &\iff 2\cdot 10^9+1\leqq 5^n<2\cdot 10^{10}+1 \\ &\iff 2\cdot 10^9<5^n\leqq 2\cdot 10^{10} \\ &\iff \log_{10}(2\cdot 10^9)<\log_{10}5^n\leqq \log_{10}(2\cdot 10^{10}) \\ &\iff \log_{10}2+9<n\log_{10}5\leqq \log_{10}2+10 \\ &\iff \frac{\log_{10}2+9}{\log_{10}5}<n\leqq \frac{\log_{10}2+10}{\log_{10}5} \qquad \cdots\cdots④\end{aligned}$$

である. $0.30<\log_{10}2<0.31$ と

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-\log_{10}2$$

より

$$0.69<\log_{10}5<0.70$$

であるから

$$\frac{0.30+9}{0.70}<\frac{\log_{10}2+9}{\log_{10}5}<\frac{0.31+9}{0.69},\quad \frac{0.30+10}{0.70}<\frac{\log_{10}2+10}{\log_{10}5}<\frac{0.31+10}{0.69}$$

である. ここで

$$\frac{0.30+9}{0.70}=13.2\cdots,\quad \frac{0.31+9}{0.69}=13.4\cdots,$$

$$\frac{0.30+10}{0.70}=14.7\cdots,\quad \frac{0.31+10}{0.69}=14.9\cdots$$

より

$$13<\frac{\log_{10}2+9}{\log_{10}5}<14,\quad 14<\frac{\log_{10}2+10}{\log_{10}5}<15$$

であるから

$$④\iff n=14$$ ……(答)

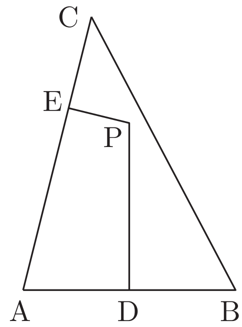
である.

[5]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 4 \qquad \cdots\text{(答)}$$

である．



(2) AB の中点を D とおき，AC を 2 : 1 に内分する点を E とおく． $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立だから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t が存在する． $\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DP}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}} = 0 \end{cases}$ であり，これを変形すると

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2s + 2a^2t = 2a^2 \\ 2a^2s + 9a^2t = 6a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s + t = 1 \\ 2s + 9t = 6 \end{cases}$$

となる．これを解いて $s = \dfrac{3}{16}$，$t = \dfrac{5}{8}$ を得る．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots ①$$

であり，これを変形すると

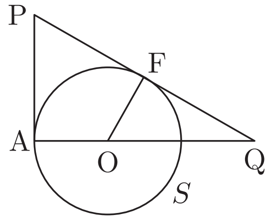
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{3}{16}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \frac{5}{8}(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる．このことと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が一次独立であることより，

$$\alpha = \frac{3}{16},\ \beta = \frac{3}{16},\ \gamma = \frac{5}{8} \qquad \cdots\text{(答)}$$

である．



(3) $\mathrm{OQ} = 2\mathrm{OA} = 4$ である．PQ と S の接点を F とおく．直角三角形 $\triangle\mathrm{OFQ}$ において $\mathrm{OF} : \mathrm{OQ} = 2 : 4 = 1 : 2$ だから $\angle\mathrm{Q} = 30^\circ$ である．よって，直角三角形 $\triangle\mathrm{APQ}$ において

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \mathrm{AP} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AQ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 = 2\sqrt{3} \qquad \cdots\text{(答)}$$

である．一方，①より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = \left|\frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \frac{9}{256}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + \frac{25}{64}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 + \frac{15}{64}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

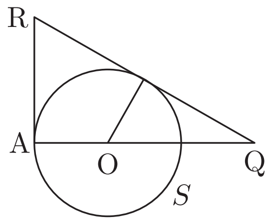
$$= \frac{9}{256} \cdot 4a^2 + \frac{25}{64} \cdot 9a^2 + \frac{15}{64} \cdot 2a^2 = \frac{33}{8}a^2$$

である．よって $\dfrac{33}{8}a^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$ で，これと $a > 0$ より

$$a = \frac{4\sqrt{22}}{11} \qquad \cdots\cdot(答)$$

である．

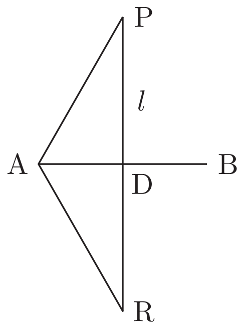
$\mathrm{AP} = 2\sqrt{3}$ を導いたのと同様にして $\mathrm{AR} = 2\sqrt{3}$ が導かれる．AD，DP は



$$\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot 2a = a = \frac{4\sqrt{22}}{11}$$

$$\mathrm{DP} = \sqrt{\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AD}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}\,)^2 - \left(\frac{4\sqrt{22}}{11}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

である．よって



$$\triangle\mathrm{APR} = 2\triangle\mathrm{ADP} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DP} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{22}}{11}\cdot\frac{10}{\sqrt{11}} = \frac{40\sqrt{2}}{11} \quad \cdots\cdot(答)$$

である．

［6］

(1) まず, 曲線 $y=G(x)$ の $(\beta,\ G(\beta))$ における接線の方程式は

$$y=G'(\beta)(x-\beta)+G(\beta)$$

であるから

$$m(x)=G'(\beta)(x-\beta)+G(\beta) \qquad \cdots\cdots①$$

である.

C と L_α は A で接し, B で交わるので, これらの方程式を連立し, y を消去して得られる x の 3 次方程式

$$F(x)-l_\alpha(x)=0$$

の 3 解は $\alpha,\ \alpha,\ \beta$ である. さらに, $F(x)-l_\alpha(x)$ の x^3 の係数は 1 であるから

$$G(x)=F(x)-l_\alpha(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta) \qquad \cdots\cdots②(答)$$

である. よって, $G(\beta)=0$ であり

$$G'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2\cdot 1$$

より $G'(\beta)=(\beta-\alpha)^2$ であるから, ①は

$$m(x)=(\beta-\alpha)^2(x-\beta) \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる.

(2) L_β の方程式を $y=l_\beta(x)$ とすると

$$l_\beta(x)=F'(\beta)(x-\beta)+F(\beta)$$

である.

L_β の方程式が $y=l_\alpha(x)+m(x)$ で与えられることを示すには

$$l_\beta(x)=l_\alpha(x)+m(x) \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

を示せばよい.

L_α の傾きは $F'(\alpha)$ であり, L_α は $\mathrm{B}(\beta,\ F(\beta))$ も通るので

$$l_\alpha(x)=F'(\alpha)(x-\beta)+F(\beta) \qquad \cdots\cdots③$$

と表せる. よって, ③ + ① より

$$l_\alpha(x)+m(x)=\{F'(\alpha)+G'(\beta)\}(x-\beta)+F(\beta)+G(\beta)$$

であり, $G'(x)=F'(x)-l'_\alpha(x)=F'(x)-F'(\alpha)$ より

$$F'(\alpha)+G'(\beta)=F'(\alpha)+\{F'(\beta)-F'(\alpha)\}=F'(\beta)$$

であるから, $G(\beta)=0$ も用いると

$$l_\alpha(x)+m(x)=F'(\beta)(x-\beta)+F(\beta)=l_\beta(x)$$

となる. よって, $(*)$ は示された. ■

(1) と同様にして, $F(x)-l_\beta(x)=0$ の 3 解が $\gamma,\ \beta,\ \beta$ であることより

$$F(x)-l_\beta(x)=(x-\gamma)(x-\beta)^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

である. ②, ④より $F(x)$ を消去すると

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)+l_\alpha(x)=(x-\gamma)(x-\beta)^2+l_\beta(x)$$

となり, $l_\alpha(x)$ と $l_\beta(x)$ は x の 1 次関数なので, 両辺の x^2 の係数を比較して

$$-(\alpha+\alpha+\beta)=-(\beta+\beta+\gamma) \quad \text{すなわち} \quad \gamma=2\alpha-\beta \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(3) (2) の結果より

$$\beta-\gamma=\beta-(2\alpha-\beta)=2(\beta-\alpha)>0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

であるから, $\gamma<\beta$ である. よって, ④より $\gamma<x<\beta$ のとき $F(x)-l_\beta(x)>0$ であるから, この範囲で C は L_β の上側にある. 以上より

$$S=\int_\gamma^\beta\{F(x)-l_\beta(x)\}dx=\int_\gamma^\beta(x-\gamma)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\gamma)^4$$

であり, ⑤を用いると

$$S=\frac{1}{12}\{2(\beta-\alpha)\}^4=\frac{4}{3}(\beta-\alpha)^4 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる.

$\alpha,\ \beta$ が $-1<\alpha<0,\ 1<\beta<2$ を満たしながら独立に変化するとき, $\beta-\alpha$ の変域は, $0<-\alpha<1$ と $1<\beta<2$ の辺々を加えて

$$1<\beta-\alpha<3$$

である. よって, S の変域は

$$\frac{4}{3}\cdot 1^4<S<\frac{4}{3}\cdot 3^4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{4}{3}<S<108 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.