2021年度 慶應義塾大学 商学部 数学

I.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)(9)
2	8	4	3	4	3	1	27

(i) x, y の相加平均が 5 であるから

$$\frac{x+y}{2}=5 \qquad \therefore\ x+y=10 \qquad \cdots\cdots ①$$

$X=\log_4 x$ と $Y=\log_4 y$ の相加平均が 1 であるから

$$\frac{\log_4 x+\log_4 y}{2}=\frac{1}{2}\log_4 xy=1$$

$$\log_4 xy=2$$

$$\therefore\ xy=4^2=16 \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②より，x, y を 2 解とする 2 次方程式で 2 次の係数が 1 のものは

$$t^2-10t+16=0$$

これを解くと

$$(t-2)(t-8)=0 \qquad \therefore\ t=2,\ 8$$

$x<y$ より

$$x=\underset{(1)}{\boxed{2}},\ y=\underset{(2)}{\boxed{8}}$$

(ii) $$(x^2)'=2x,\ \ \{-3(x-p)^2+q\}'=-6(x-p)$$

C_1 と C_2 は $x=a$ で接するから

$$\begin{cases} a^2=-3(a-p)^2+q & \cdots\cdots ③ \\ 2a=-6(a-p) & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

④より

$$p=\frac{\overset{(3)}{\boxed{4}}}{\underset{(4)}{\boxed{3}}}a$$

③より

$$q=a^2+3\left(a-\frac{4}{3}a\right)^2=\frac{\overset{(5)}{\boxed{4}}}{\underset{(6)}{\boxed{3}}}a^2$$

接線 ℓ の方程式は

$$y=2a(x-a)+a^2$$

ℓ と C_2 は $x=a$ で接するから，x^2 の係数に注意して

$$2a(x-a)+a^2-\left\{-3(x-p)^2+q\right\}=3(x-a)^2$$

が成り立つことを考え，直線 ℓ，放物線 C_2，および直線 $x=p$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{4}{3}a}\left(2a(x-a)+a^2-\left\{-3(x-p)^2+q\right\}\right)dx$$

© 駿台予備学校

$$= \int_0^{\frac{4}{3}a} 3(x-a)^2\,dx$$

$$= \Big[(x-a)^3 \Big]_0^{\frac{4}{3}a}$$

$$= \frac{\overset{(7)}{\boxed{1}}}{\underset{(8)(9)}{\boxed{27}}}a^3$$

II.

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
$\dfrac{a+n}{k+n}$	$\dfrac{a}{k}$	$\dfrac{a}{k+n}$	$\dfrac{3a(a+n)(k-a)}{k(k+n)(k+2n)}$

(i)　1 回目に赤玉が出たとき，1 回目の操作後の袋の中には

$a+n$ 個の赤玉，$k-a$ 個の青玉

の合計 $k+n$ 個の玉が入っているから，2 回目に赤玉が出る条件付き確率は

$$\boxed{\dfrac{a+n}{k+n}}\ (ア)$$

(ii)　1 回目に青玉が出たとき，1 回目の操作後の袋の中には

a 個の赤玉，$k+n-a$ 個の青玉

の合計 $k+n$ 個の玉が入っているから，2 回目に赤玉が出る条件付き確率は

$$\frac{a}{k+n}$$

2 回目に赤玉が出る確率は

$$\frac{a}{k}\cdot\frac{a+n}{k+n}+\frac{k-a}{k}\cdot\frac{a}{k+n}=\boxed{\dfrac{a}{k}}\ (イ)$$

(iii)　2 回目に青玉が出るのは (ii)の余事象であり，その確率は

$$1-\frac{a}{k}=\frac{k-a}{k}$$

1 回目に赤玉を取り出し，2 回目に青玉を取り出す確率は

$$\frac{a}{k}\cdot\frac{k-a}{k+n}$$

であるから，2 回目に青玉が出たとき，1 回目に赤玉が出ていた確率は

© 駿台予備学校

$$\frac{\frac{a}{k}\cdot\frac{k-a}{k+n}}{\frac{k-a}{k}}=\boxed{\frac{a}{k+n}}\ \text{(ウ)}$$

(iv) 操作を 3 回繰り返すとき，得点合計が 4 になるのは

赤玉が 2 回，青玉が 1 回

出るときである。赤赤青と出る確率は

$$\frac{a}{k}\cdot\frac{a+n}{k+n}\cdot\frac{k-a}{k+2n}$$

赤青赤と出る確率は

$$\frac{a}{k}\cdot\frac{k-a}{k+n}\cdot\frac{a+n}{k+2n}$$

青赤赤と出る確率は

$$\frac{k-a}{k}\cdot\frac{a}{k+n}\cdot\frac{a+n}{k+2n}$$

であるから，求める確率は

$$\boxed{\frac{3a(a+n)(k-a)}{k(k+n)(k+2n)}}\ \text{(エ)}$$

© 駿台予備学校

III

$\dfrac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}$	$-\boxed{(12)}$	$\boxed{(13)}$	$\dfrac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}$	$\boxed{(16)(17)}$
$\dfrac{3}{5}$	-1	3	$\dfrac{1}{3}$	64

(i) $\overrightarrow{a}=(2,\ 1),\ \overrightarrow{b}=(1,\ 2)$ より,

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},\quad |\overrightarrow{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\cdot1+1\cdot2=4$$

であるので,

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

となる. これより,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$ ……(答)

である.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=f(t)\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=f(t+2)\overrightarrow{a}$ であり, $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$ であるから, P と Q が一致するとき,

$$f(t)=f(t+2)$$
$$9t^2+1=9(t+2)^2+1$$

より, これを解いて,

$$t=-1$$ ……(答)

である.

$f(t)\geqq1$ より, 2 点 P, Q は原点とは異なる $y=\dfrac{1}{2}x$ 上の点であり, さらに $t\neq-1$ のとき, 2 点 P, Q は異なる 2 点である. この 2 点と $y=2x$ 上にある点 R が一直線上に並ぶとき, 点 R は $y=2x$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ との交点である原点と一致し, このとき t は

$$g(t)=\frac{1}{8}(t-3)^2=0$$

より,

$$t=3$$ ……(答)

である.

(iii) $-\dfrac{4}{3}\leqq t\leqq4$ かつ, $t\neq-1,\ 3$ のとき, 点 P, Q は $y=\dfrac{1}{2}x$ かつ $x>0$ 上の異なる 2 点, 点 R は $y=2x$ かつ $x>0$ 上の点となる.

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(f(t+2)-f(t))\overrightarrow{a}=36(t+1)\overrightarrow{a}$$

より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=36|(t+1)\overrightarrow{a}|=36\sqrt{5}|t+1|$$

となり,

© 駿台予備学校

$$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=|g(t)\,\overrightarrow{b}\,|=\frac{\sqrt{5}}{8}(t-3)^2$$

である.

また, $f(t)>0$, $g(t)>0$ より, $\angle\mathrm{POR}=\theta$ であるので, 点 R から直線 PQ へ下ろした垂線の足を H とすると,

$$\mathrm{RH}=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta=\frac{3\sqrt{5}}{40}(t-3)^2$$

よって,

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RH}=\frac{27}{4}|t+1|(t-3)^2=\frac{27}{4}|(t+1)(t-3)^2|$$

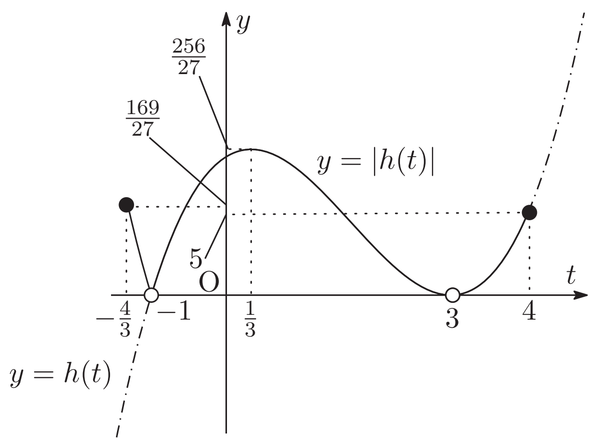
となる. ここで, $h(t)=(t+1)(t-3)^2$ とおくと,

$$h'(t)=(t-3)^2+(t+1)\cdot 2(t-3)=(t-3)(3t-1)$$

より, $h(t)$ は, $-\frac{4}{3}\leqq t\leqq 4$ で下表のように増減する.

t	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$	$-\frac{169}{27}$	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

これと $h(-1)=0$ より, $-\frac{4}{3}\leqq t\leqq 4$ かつ $t\neq -1,\ 3$ での $y=|h(t)|$ のグラフは下図の実線のようになる.



以上より, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は,

$$t=\frac{1}{3}\ \text{で, 最大値}\ \frac{27}{4}\left|h\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\frac{27}{4}\cdot\frac{256}{27}=64 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる.

© 駿台予備学校

IV

$-\boxed{(18)(19)}$	$-\dfrac{\boxed{(20)(21)(22)}}{\boxed{(23)}}$	$\dfrac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}n^3-\dfrac{\boxed{(26)(27)(28)}}{\boxed{(29)}}n$	$\boxed{(30)}$, $\boxed{(31)}$	$-\boxed{(32)(33)(34)}$
-44	$-\dfrac{161}{4}$	$\dfrac{1}{3}n^3-\dfrac{169}{3}n$	7, 8	-280

(i) $n \geqq 2$ において, $\mathrm{A}_{n-1}(n-1,\ n-1)$ に割り当てられる数列 $\{a_k\}$ の項を a_l とすると, l は正方形 J_{n-1} の周と内部に存在する格子点から原点を除いたものの個数であり,

$$l=(2n-1)^2-1$$

となる.

$\mathrm{P}_n(n-1,\ n)$ に割り当てられる数列 $\{a_k\}$ の項は, A_{n-1} に割り当てられる項の次の項なので,

$$p_n=a_{l+1}=a_{(2n-1)^2}$$

となり, これは $n=1$ でも成り立つ.

数列 $\{a_k\}$ は, 初項が -56, 公差が $\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから,

$$a_k=-56+\frac{1}{4}(k-1)=\frac{k-225}{4}$$

となるので,

$$p_4=a_{(2\cdot 4-1)^2}=a_{49}=\frac{49-225}{4}=-44 \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる.

C_4 は正方形 J_4 の周上で P_4 から 15 だけ進んだ点だから,

$$c_4=a_{49+15}=a_{64}=\frac{64-225}{4}=-\frac{161}{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる.

(ii) (i) より,

$$p_n=a_{(2n-1)^2}=\frac{(2n-1)^2-225}{4}=n^2-n-56$$

であるから,

$$\begin{aligned} q_n&=\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}(i^2-i-56)\\ &=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-56n\\ &=\frac{1}{3}n^3-\frac{169}{3}n \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる.

(iii) (ii) より, $n \geqq 2$ について,

$$q_n-q_{n-1}=p_n$$

である.

$$p_n=n^2-n-56=(n+7)(n-8)$$

© 駿台予備学校

であるので,

$$2 \leqq n \leqq 7 \text{ で } p_n < 0,\ \ n = 8 \text{ で } p_n = 0,\ \ n \geqq 9 \text{ で } p_n > 0$$

となる. これより,

$$q_1 > q_2 > \cdots > q_6 > q_7 = q_8 < q_9 < \cdots$$

となり, q_n が最小値をとるのは,

$$n = 7 \text{ もしくは } n = 8 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときであり, その値は,

$$q_7 = \frac{7^3 - 169 \cdot 7}{3} = -280 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

© 駿台予備学校