2021 年度 慶応義塾大学 医学部 数学

[I]

(1)

(あ)	(い)	(う)
$\dfrac{5\sqrt{5}}{7}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$-5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ より，

$$5\overrightarrow{OA}=7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}\quad\cdots\cdots①$$

であるから，この両辺の大きさの 2 乗を考え，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ を用いると，

$$|5\overrightarrow{OA}|^2=|7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}|^2$$

$$\therefore\quad 25|\overrightarrow{OA}|^2=49|\overrightarrow{OB}|^2+112\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+64|\overrightarrow{OC}|^2$$

$$\therefore\quad 25=49+112\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+64$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{25-(49+64)}{112}=-\frac{11}{14}$$

を得る．したがって，

$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=1+\frac{11}{7}+1=\frac{25}{7}$$

より，

$$\mathrm{BC}=|\overrightarrow{BC}|=\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$$

である．また，① より，

$$\overrightarrow{OA}=\frac{15}{5}\,\frac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{8+7}$$

であるから，OA を $1:2$ に内分する点と BC を $8:7$ に内分する点は一致する．したがって，この一致した点が P であるから，

$$\mathrm{OP}=\frac{1}{3}\mathrm{OA}=\frac{1}{3}$$

である．このことから，

$$\triangle\mathrm{ABC}=2\triangle\mathrm{OBC}=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-\left(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)^2}=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{14^2-11^2}{14^2}}=\frac{\sqrt{(14+11)(14-11)}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

である．

(2)

(え)	(お)
$\dfrac{\pi}{3m}$	$\dfrac{2}{5}$

曲線 $y=x^\alpha-mx$ と x 軸との交点の x 座標を $x=0,\ t$ とすると，

$$x^\alpha-mx=x\left(x^{\alpha-1}-m\right) \text{ より，} t=m^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad \cdots\cdots①$$

である．これを用いると，

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^t \pi y^2\,dx=\pi\int_0^t (x^\alpha-mx)^2\,dx=\pi\int_0^t\left(x^{2\alpha}-2mx^{\alpha+1}+m^2x^2\right)dx\\
&=\left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}-\frac{2m}{\alpha+2}x^{\alpha+2}+\frac{m^2}{3}x^3\right]_0^t\\
&=\pi\left(\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}-\frac{2m}{\alpha+2}t^{\alpha+2}+\frac{m^2}{3}t^3\right)\\
&=\pi\left(\frac{m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}}{2\alpha+1}-\frac{2}{\alpha+2}m^{1+\frac{\alpha+2}{\alpha-1}}+\frac{1}{3}m^{2+\frac{3}{\alpha-1}}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2\alpha+1}-\frac{2}{\alpha+2}+\frac{1}{3}\right)m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\pi
\end{aligned}$$

となる．したがって，m を固定するとき，

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to+0}V&=\lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{1}{2\alpha+1}-\frac{2}{\alpha+2}+\frac{1}{3}\right)m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\pi=\left(1-1+\frac{1}{3}\right)m^{-1}\pi\\
&=\frac{\pi}{3m}
\end{aligned}$$

である．一方，α を固定するとき，

$$\lim_{m\to\infty}m^3\cdot m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}=\lim_{m\to\infty}m^{\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}}=\begin{cases}\infty & \left(0<\alpha<\dfrac{2}{5}\text{ のとき}\right)\\ 1 & \left(\alpha=\dfrac{2}{5}\text{ のとき}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{2}{5}<\alpha<1\text{ のとき}\right)\end{cases}$$

であるから，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}m^3V$ が 0 でない数に収束するためには，$\alpha=\dfrac{2}{5}$ が必要であり，逆に $\alpha=\dfrac{2}{5}$ のとき，

$$\lim_{m\to\infty}m^3V=\pi\left(\frac{1}{\frac{4}{5}+1}-\frac{2}{\frac{2}{5}+2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{18}$$

となり，確かに $\displaystyle\lim_{m\to\infty}m^3V$ は 0 でない数に収束する．よって，求める α は，

$$\alpha=\frac{2}{5}$$

である．

（3）

(か)	(き)	(く)	(け)	(こ)
176	2	6	8	3

$f(x)=x^2+kx+k+35$ とおくと,

$$f(x)=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}k^2+k+35=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(k+10)(k-14)$$

・α_k, β_k がともに実数で, $\alpha_k \neq \beta_k$ であるための条件は,

$$f\left(-\frac{k}{2}\right)<0 \qquad \therefore \quad (k+10)(k-14)>0 \qquad \therefore \quad k<-10 \text{ または } 14<k$$

であるから,

$$A=\{\,k \mid k\text{は整数, かつ }(-100 \leqq k<-10 \text{ または } 14<k \leqq 100)\,\}$$

したがって,

$$n(A)=90+86=176$$

また,

$$\overline{A}=\{\,k \mid k\text{は整数, かつ } -10 \leqq k \leqq 14\,\}$$

であり, $k \in \overline{A}$ のもとでは, $f(x)=0$ の解は, $-\dfrac{k}{2} \pm \dfrac{\sqrt{-(k+10)(k-14)}}{2}i$ ……①となる.

・α_k, β_k がともに実数で, $\alpha_k \neq \beta_k$ であり, かつ, α_k, β_k の実部がともに2より大きいための条件は, $k \in A$ のもとで,

$$-\frac{k}{2}>2 \text{ かつ } f(2)>0 \qquad \therefore \quad k<-4 \text{ かつ } 3k+39>0 \qquad -13<k<-4$$

となることであるから,

$$A \cap B=\{\,k \mid k\text{は整数, かつ } -13<k<-10\,\} \qquad \therefore \quad n(A \cap B)=2$$

・「α_k, β_k がともに実数で, $\alpha_k \neq \beta_k$」ではなく, かつ, α_k, β_k の実部がともに2より大きいための条件は, $k \in \overline{A}$ のもとで, ①より,

$$-\frac{k}{2}>2 \qquad \therefore \quad k<-4$$

となることであるから，

$$\overline{A}\cap B=\{\,k\mid k\text{は整数，かつ }-10\leqq k<-4\,\} \qquad \therefore \quad n(\overline{A}\cap B)=6$$

・α_k，β_kがともに実数で，$\alpha_k\neq\beta_k$であり，かつ，α_k，β_kの実部と虚部が全て整数であるための条件は，$k\in A$のもとで，α_k，β_kが相異なる2整数となることである．……②

いま，$f(x)=0$について，解と係数の関係より，

$$\alpha_k+\beta_k=-k \quad \cdots\cdots③ \quad \text{かつ} \quad \alpha_k\beta_k=k+35$$

が成り立つから，これらより，α_k，β_kは，

$$\alpha_k\beta_k+\alpha_k+\beta_k=35 \qquad \therefore \quad (\alpha_k+1)(\beta_k+1)=36\ (=2^2\cdot3^2) \quad \cdots\cdots④$$

を満たす．

②より，④において，$\alpha_k<\beta_k$であるとすると，

$$\begin{aligned}(\alpha_k+1,\ \beta_k+1)=&(-36,\ -1),\ (-18,\ -2),\ (-12,\ -3),\ (-9,\ -4),\\ &(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (\alpha_k,\ \beta_k)=(-37,-2),(-19,-3),(-13,-4),(-10,-5),(0,35),(1,17),(2,11),(3,8)$$

であるから，③とあわせると，

$$A\cap C=\{\,39,\ 22,\ 17,\ 15,\ -35,\ -18,\ -13,\ -11\} \qquad \therefore \quad n(A\cap C)=8$$

・「α_k，β_kがともに実数で，$\alpha_k\neq\beta_k$」ではなく，かつ，α_k，β_kの実部と虚部が全て整数であるための条件は，$k\in\overline{A}$のもとで，①より，

$$-\frac{k}{2},\ \frac{\sqrt{-(k+10)(k-14)}}{2}\text{がともに整数である}$$

ことであり，これは，$k=2l$（lは整数で，$-5\leqq l\leqq 7$ ……⑤）とおくと，

$$\frac{\sqrt{-(2l+10)(2l-14)}}{2}=\sqrt{-(l+5)(l-7)}\text{が整数となる}$$

ことと同値であるから，⑤のもとで，これを満たすものを調べれば，

$$l=-5,\ 1,\ 7 \qquad \therefore \quad \overline{A}\cap C=\{\,-10,\ 2,\ 14\} \qquad \therefore \quad n(\overline{A}\cap C)=3$$

[II]

(1)

(あ)	(い)
$\dfrac{1}{2}(n+1)$	$\dfrac{1}{12}(n+1)(n-1)$

x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ には 1, 2, $\cdots$, n が 1 つずつ現れるから，

$$T=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),\ U=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

とおくと，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=T,\ \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2=U$$

である．よって，

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{T}{n}=\frac{1}{2}(n+1)$$

$$\begin{aligned}{s_x}^2&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2-\overline{x}^2=\frac{U}{n}-\overline{x}^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2\\&=\frac{1}{12}(n+1)(n-1)\end{aligned}$$

であり，同様に，

$$\sum_{i=1}^{n} y_i=T,\ \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2=U,\ \overline{y}=\frac{1}{2}(n+1),\ {s_y}^2=\frac{1}{12}(n+1)(n-1)$$

である．

(2)

$$\begin{aligned}s_{xy}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_i\overline{y}-\overline{x}y_i+\overline{x}\,\overline{y})\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i+\frac{1}{n}\cdot n\overline{x}\,\overline{y}\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\,\overline{x}-\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{x}\,\overline{y} \qquad \cdots\cdots ①\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{4}(n+1)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 4ns_{xy}=4\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n(n+1)^2$$

ここで，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ は整数であるから，$\displaystyle 4\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ は 4 の倍数であるが，n が奇数の 2 倍であ

ることより，$n(n+1)^2$ は奇数の 2 倍であり，4 の倍数ではないから，

$$4ns_{xy} \neq 0 \qquad \therefore \quad s_{xy} \neq 0$$

である．

(3)

(う)	(え)
$(n-1)n(n+1)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$

$d_i = x_i - y_i$ を用いると，

$$x_i y_i = \frac{{x_i}^2 + {y_i}^2 - (x_i - y_i)^2}{2} = \frac{{x_i}^2 + {y_i}^2 - {d_i}^2}{2}$$

であるから，① より，

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2 + {y_i}^2 - {d_i}^2}{2} - \overline{x}\,\overline{y}$$

となり，

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2,\ \overline{x} = \overline{y}$$

であることに注意すれば，

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2 + {y_i}^2 - {d_i}^2}{2} - \overline{x}\,\overline{y}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 - \overline{x}^2 = {s_x}^2 - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$$

となる．したがって，$s_x = s_y$ であることも用いれば，

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{{s_x}^2 - \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2}{{s_x}^2}$$

であり，(1) の結果とあわせて，

$$r = 1 - \frac{1}{2n{s_x}^2}\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 = 1 - \frac{6}{(n-1)n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$$

となる．

(4)

(お)	(か)	(き)	(く)
x_i	1	$n+1-x_i$	-1

(3) より，r が最大となるのは，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$ が最小となるときであるから，

$y_i = x_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときであり，最大値は 1 である．

一方，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\dfrac{1}{4}(n+1)^2}{\dfrac{1}{12}(n+1)(n-1)}$$

であるから，r が最小となるのは，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ が最小となるときである．

いま，$n+1-x_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ に 1，2，$\cdots$，n が 1 つずつ現れることより，

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-x_i)=T,\ \sum_{i=1}^{n}(n+1-x_i)^2=U$$

であるから，

$$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(n+1-x_i)\}^2\geqq 0$$

より，

$$\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2-2\sum_{i=1}^{n}(n+1-x_i)y_i+\sum_{i=1}^{n}(n+1-x_i)^2\geqq 0$$

$$\therefore\quad U-2(n+1)T+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+U\geqq 0$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geqq(n+1)T-U$$

であり，等号は $y_i=n+1-x_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ のときに成り立つ．

以上により，r はこのとき最小となり，最小値は，

$$r=\frac{\dfrac{(n+1)T-U}{n}-\dfrac{1}{4}(n+1)^2}{\dfrac{1}{12}(n+1)(n-1)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}(n+1)^2-\dfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\dfrac{1}{4}(n+1)^2}{\dfrac{1}{12}(n+1)(n-1)}=-1$$

である．

[Ⅲ]

$h>0$，$g>0$，$h\neq g$ のもとで，A，Q のそれぞれの点に立っている塔の先端を A′，Q′ とすると，A，Q とは異なる点 P から 2 つの塔の先端を見上げる角度が等しくなるのは，2 つの三角形 PAA′，PQQ′ が相似となるとき，すなわち，

$$\mathrm{PA}:\mathrm{AA'}=\mathrm{PQ}:\mathrm{QQ'} \qquad \therefore \quad \mathrm{PA}:h=\mathrm{PQ}:g \qquad \therefore \quad h\mathrm{PQ}=g\mathrm{PA}$$

となるときである．特に，$\mathrm{P}(X, Y)$ とおけば，これは，

$$h^2\mathrm{PQ}^2=g^2\mathrm{PA}^2 \qquad \therefore \quad h^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2\}=g^2\{X^2+(Y-1)^2\} \quad \cdots\cdots①$$

と表される．

（1）

(あ)	(い)	(う)
$\dfrac{h^2T}{h^2-g^2}$	1	$\dfrac{hgT}{\lvert h^2-g^2\rvert}$

$\mathrm{Q}(T, 1)$ （$T>0$），すなわち，$x=T$，$y=1$ のとき，①は，

$$h^2\{(X-T)^2+(Y-1)^2\}=g^2\{X^2+(Y-1)^2\}$$

$$\therefore \quad X^2-\frac{2h^2T}{h^2-g^2}X+\frac{h^2T^2}{h^2-g^2}+(Y-1)^2=0$$

$$\therefore \quad \left(X-\frac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(Y-1)^2=\left(\frac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2-\frac{h^2T^2}{h^2-g^2}$$

$$\therefore \quad \left(X-\frac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(Y-1)^2=\left(\frac{hgT}{h^2-g^2}\right)^2$$

となるから，点 P は，

$$\text{中心} \quad \left(\frac{h^2T}{h^2-g^2}, 1\right)，\text{半径} \quad \left|\frac{hgT}{h^2-g^2}\right|=\frac{hgT}{\lvert h^2-g^2\rvert}$$

の円周上にある．

（2）

(え)	(お)，(か)
$h>g$	$y=\pm\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$

点Pでy軸上にあるものがただ１つであるとき．①で$X=0$として得られるYについての方程式

$$h^2\{x^2+(Y-y)^2\}=g^2(Y-1)^2 \quad \cdots\cdots②$$

はただ１つの解をもつ……③.

いま，②が$Y=1$を解にもつとすると，

$$h^2\{x^2+(1-y)^2\}=0 \qquad \therefore \quad x^2+(1-y)^2=0 \qquad \therefore \quad (x,\ y)=(0,\ 1)$$

となり，A，Qが異なることに反する．よって，②，すなわち，

$$(h^2-g^2)Y^2-2(h^2y-2g^2)Y+h^2(x^2+y^2)-g^2=0$$

が$Y=1$を解にもつことはないから，③より，この方程式は重解をもつ.

したがって，

$$(h^2y-2g^2)^2-(h^2-g^2)\{h^2(x^2+y^2)-g^2\}=0$$

$$\therefore \quad h^2\{g^2(y-1)^2-(h^2-g^2)x^2\}=0 \qquad \therefore \quad (y-1)^2=\frac{h^2-g^2}{g^2}x^2 \quad \cdots\cdots④$$

であり，これを満たす実数の組$(x,\ y)(\neq(0,\ 1))$が存在するための条件は，

$$\frac{h^2-g^2}{g^2}\geqq 0 \qquad \therefore \quad h>g$$

である.

また，このとき，④より，

$$y-1=\pm\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x \qquad \therefore \quad y=\pm\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$$

であるから，点Qは2直線$y=\pm\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$のいずれかの上にある．

（3）

(き)	(く)	(け)	(こ)	(さ)	(し)，(す) (せ)，(そ)	(た)，(ち) (つ)，(て)	(と)
$\dfrac{h^2}{g^2-h^2}$	0	$\dfrac{h^2}{g^2}$	0	$g>h$	$(0,\ \pm1)$	$(0,\ \pm1)$	$\sqrt{2}$

点Pでx軸上にあるものがただ1つであるとき．①で$Y=0$として得られるXについての方程式，

$$h^2\{(X-x)^2+y^2\}=g^2(X^2+1) \qquad \therefore\quad (h^2-g^2)X^2-2h^2xX+h^2(x^2+y^2)-g^2=0$$

は重解をもつから，

$$(h^2x)^2-(h^2-g^2)\{h^2(x^2+y^2)-g^2\}=0$$

$$\therefore\quad h^2g^2x^2-h^2(h^2-g^2)y^2=g^2(g^2-h^2) \qquad \therefore\quad \frac{h^2}{g^2-h^2}x^2+\frac{h^2}{g^2}y^2=1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

よって，点Qは，⑤で表される2次曲線C上にある．Cが楕円であるのは，

$$\frac{h^2}{g^2-h^2}>0 \qquad \therefore\quad g>h \quad \cdots\cdots ⑥$$

のときであり，このとき，Cの2つの焦点の座標は，

$$\left(0,\ \pm\sqrt{\frac{g^2}{h^2}-\frac{g^2-h^2}{h^2}}\right) \qquad \therefore\quad (0,\ \pm1)$$

である．

また，⑥が成り立たないとき，すなわち，$h>g$のとき，Cは双曲線

$$-\frac{h^2}{h^2-g^2}x^2+\frac{h^2}{g^2}y^2=1$$

となり，Cの2つの焦点の座標は，

$$\left(0,\ \pm\sqrt{\frac{g^2}{h^2}+\frac{h^2-g^2}{h^2}}\right) \qquad \therefore\quad (0,\ \pm1)$$

である．

さらに，このとき，Cの漸近線は，$y=\pm\dfrac{g}{\sqrt{h^2-g^2}}x$であるから，

$$\frac{g}{\sqrt{h^2-g^2}}\cdot\left(-\frac{g}{\sqrt{h^2-g^2}}\right)=-1 \qquad \therefore\quad g^2=h^2-g^2 \qquad \therefore\quad \frac{h}{g}=\sqrt{2}$$

のとき，Cは直角双曲線となる．

[IV]

(あ)	(い)	(う)
$t-\dfrac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}}$	$\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}+\dfrac{2r}{e^t+e^{-t}}$	$0<r\leqq 1$

(え)	(お)	(か)
$\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$	$2\sqrt{r}$	$\dfrac{Y^2-2r+Y\sqrt{Y^2-4r}}{2}$

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

であるから，

$$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=1\ \cdots\cdots ①,\ f''(x)=f(x)\ \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

また，

$$f(x)\geqq\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=1\ (\text{等号成立}\iff e^x=e^{-x}\ \text{すなわち}\ x=0)\ \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

さて，$t>0$ において $f'(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}>0$ $\cdots\cdots$ ④ であることより，$\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における C の法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(t)}$ であるから，法線の方向ベクトル (の 1 つ) は $\overrightarrow{n}=(-f'(t),\ 1)$ であり，$\overrightarrow{n}$ の x 成分は負である．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $\overrightarrow{n}$ と同じ向きであるから，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=r$ も考慮し，①，③ を用いれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{r}{|\overrightarrow{n}|}\overrightarrow{n}=\frac{r}{\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}}(-f'(t),\ 1)=\frac{r}{f(t)}(-f'(t),\ 1)$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，

$$X=t-\frac{rf'(t)}{f(t)}=t-\frac{r(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}},\ Y=f(t)+\frac{r}{f(t)}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{2r}{e^t+e^{-t}}$$

となる．

これより，

$$X'(t) = 1 - r\frac{f''(t)\cdot f(t) - f'(t)\cdot f'(t)}{\{f(t)\}^2} = 1 - r\frac{\{f(t)\}^2 - \{f'(t)\}^2}{\{f(t)\}^2} = 1 - \frac{r}{\{f(t)\}^2}$$

$$= \frac{\{f(t)+\sqrt{r}\}\{f(t)-\sqrt{r}\}}{\{f(t)\}^2}$$

$$Y'(t) = f'(t) - \frac{rf'(t)}{\{f(t)\}^2} = f'(t)X'(t) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．

(a)　$0 < r \leqq 1$ のとき，③ に注意すると，$X'(t) > 0$ $(t > 0)$ であるから，$t > 0$ で $X(t)$ は増加する．

(b)　$r > 1$ のとき，

$$f(t) - \sqrt{r} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \sqrt{r} = \frac{(e^t)^2 - 2\sqrt{r}e^t + 1}{2e^t}$$

$$= \frac{1}{2e^t}\left\{e^t - \left(\sqrt{r}+\sqrt{r-1}\right)\right\}\left\{e^t - \left(\sqrt{r}-\sqrt{r-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2e^t}\left\{e^t - \left(\sqrt{r}+\sqrt{r-1}\right)\right\}\left(e^t - \frac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{r-1}}\right)$$

であり，$0 < \dfrac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{r-1}} < 1 < \sqrt{r}+\sqrt{r-1}$ であることと，③ より，$X(t)$ の増減は下表のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$	$\cdots$
$X'(t)$		$-$	0	$+$
$X(t)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

(a)，(b) の考察と，$X(0) = 0$ であることより，すべての $t > 0$ に対して $X(t) > 0$ となるための条件は，

$$0 < r \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

である．⑥ が成り立たないとき，すなわち，$r > 1$ のとき，④，⑤ より，$Y(t)$ の増減は $X(t)$ の増減と一致する $\cdots\cdots$⑦ から，(b) の増減表より，$Y(t)$ は $t = \log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$ において最小となり，このとき，$f(t) = \sqrt{r}$ であるから，最小値は $2\sqrt{r}$ である．

また，⑥ が成り立つとき，⑤ より，

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y'(t)}{X'(t)} = f'(t)$$

であるから，② より，

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + 1 = \{f'(t)\}^2 + 1 = \{f(t)\}^2$$

であり，$Y=f(t)+\dfrac{r}{f(t)}$ より，

$$\{f(t)\}^2-Yf(t)+r=0 \qquad \therefore \quad f(t)=\frac{Y\pm\sqrt{Y^2-4r}}{2}$$

である．

いま，⑦ より，$Y(t)>Y(0)=1+r$ であるから，

$$Y^2-4r>(1+r)^2-4r=1-2r+r^2=(1-r)^2$$

であり，$1-r \geqq 0$ であることに注意すると，

$$\frac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}>\frac{(1+r)+(1-r)}{2}=1$$

$$\frac{Y-\sqrt{Y^2-4r}}{2}=\frac{2r}{Y+\sqrt{Y^2-4r}}<\frac{2r}{(1+r)+(1-r)}<r\leqq 1$$

である．よって，③ より，

$$f(t)=\frac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}$$

である．以上により，

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+1=\left(\frac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}\right)^2=\frac{Y^2-2r+Y\sqrt{Y^2-4r}}{2}$$

となる．