2021年度 大阪市立大学 前期 数学 理系

第１問

$D_n = I_n - \int_0^1 f(x)\,dx$ とおく.

問１ $f(x)=x^2$ のとき

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \int_0^1 x^2\,dx \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

より,

$$D = \lim_{n\to\infty} nD_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

問２ $f(x)=x^3$ のとき

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \int_0^1 x^3\,dx \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 - \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}
\end{aligned}$$

より,

$$D = \lim_{n\to\infty} nD_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

問３ $f(x)=e^x$ のとき

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}} - \int_0^1 e^x\,dx \\
&= \frac{1}{n}\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}}-1} - \left[e^x\right]_0^1 \\
&= \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1} - (e-1) \\
&= \frac{e-1}{n}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1} - n\right)
\end{aligned}$$

ここで, $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + a_n$ とおくと

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{e-1}{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}+a_n}{\frac{1}{n}+a_n} - n\right) \\ &= \frac{e-1}{n}\left(\frac{n+1+na_n}{1+na_n} - n\right) \\ &= \frac{e-1}{n}\left(1+\frac{n}{1+na_n} - n\right) \\ &= \frac{e-1}{n}\left(1-\frac{n^2a_n}{1+na_n}\right) \end{aligned}$$

であり, $\lim_{n\to\infty} n^2a_n = \frac{1}{2}$ より

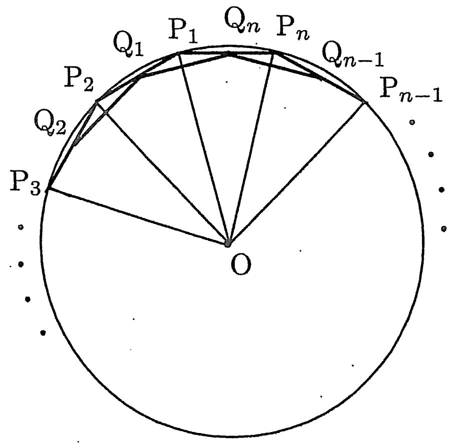
$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot n^2a_n = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n\to\infty} nD_n \\ &= \lim_{n\to\infty}(e-1)\left(1-\frac{n^2a_n}{1+na_n}\right) \\ &= (e-1)\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{1+0}\right) \\ &= \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

……(答)

第２問



図のように, 単位円の中心をＯとし, 単位円に内接する正 n 角形の各頂点を反時計回りに, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots\cdots, \mathrm{P}_n$ と定める. さらに, 辺 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ の中点を Q_i とする. ただし, $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_1$ とする.

問１

$\angle \mathrm{P}_i\mathrm{OP}_{i+1} = \dfrac{2\pi}{n}, \mathrm{OP}_i = \mathrm{OP}_{i+1} = 1$ であるから, $\triangle \mathrm{OP}_i\mathrm{P}_{i+1}$ の面積を S_i とすると

$$S_i = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

よって　　$A_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}$　　$\cdots\cdots$ (答)

問２

$\triangle \mathrm{OP}_i\mathrm{P}_{i+1}$ は $\mathrm{OP}_i = \mathrm{OP}_{i+1}$ の二等辺三角形であり, Q_i は辺 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ の中点であるから

$$\angle \mathrm{OQ}_i\mathrm{P}_i = \frac{\pi}{2}, \quad \angle \mathrm{P}_i\mathrm{OQ}_i = \frac{\pi}{n}$$

これと, $\mathrm{OP}_i = 1$ であることから　　$\mathrm{OQ}_i = \cos\dfrac{\pi}{n}$

また, $\angle \mathrm{Q}_i\mathrm{OQ}_{i+1} = \dfrac{2\pi}{n}$ であるから, $\triangle \mathrm{OQ}_i\mathrm{Q}_{i+1}$ の面積を T_i とすると

$$T_i = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}$$

よって　　$B_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}$　　$\cdots\cdots$ (答)

問３

問２の結果より, $B_n = \dfrac{1}{2} n \sin\dfrac{2\pi}{n}\cos^2\dfrac{\pi}{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} B_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot\cos^2\frac{\pi}{n} \\ &= \pi\cdot 1\cdot 1^2 \\ &= \pi\end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n = \pi$　　$\cdots\cdots$ (答)

問 4

問 1, 問 2 の結果より, $A_n=\dfrac{1}{2}n\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $B_n=\dfrac{1}{2}n\sin\dfrac{2\pi}{n}\cos^2\dfrac{\pi}{n}$ であるから

$$\frac{B_n}{A_n}=\cos^2\frac{\pi}{n}$$

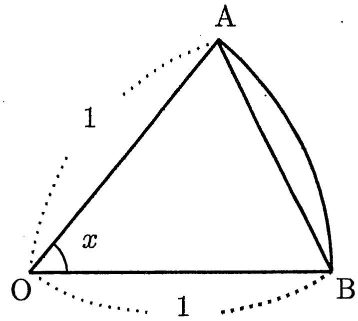
$\cos^2\dfrac{\pi}{n}=1-\sin^2\dfrac{\pi}{n}$ であるから

$$\frac{B_n}{A_n}>\frac{99}{100}\iff\sin^2\frac{\pi}{n}<\frac{1}{100}\iff\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{10}\quad\left(\because\ n\geqq 32\text{ より},\sin\frac{\pi}{n}>0\right)$$

よって, $n\geqq 32$ のとき, $\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{1}{10}$ が成り立つことを示せばよい.

$n\geqq 32$ において, $\sin\dfrac{\pi}{n}$ は単調減少であるから

$$\sin\frac{\pi}{n}\leqq\sin\frac{\pi}{32}$$



ここで, 右図の $\triangle$OAB と扇形 OAB の面積の大小関係より, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x$ すなわち $\sin x<x$

が成り立つから

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{32}&<\frac{\pi}{32}\\&<\frac{3.2}{32}\quad(\because\pi<3.2)\\&=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

したがって, $n\geqq 32$ のとき

$$\sin\frac{\pi}{n}\leqq\sin\frac{\pi}{32}<\frac{1}{10}$$

が成り立つ.

ゆえに, $n\geqq 32$ のとき, $\dfrac{B_n}{A_n}>\dfrac{99}{100}$ が成り立つ. (証明終わり)

第３問

問1

K を平面 $z=t$ で切ったときの切り口を表す不等式は

$$\frac{1}{2}(x^2+t^2) \leqq y \leqq x+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(*)$$

よって，求める t の条件は

「$(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ が存在する」

$\Leftrightarrow$「$\frac{1}{2}(x^2+t^2) \leqq x+\frac{1}{2}$ をみたす実数 x が存在する」

$\Leftrightarrow$「$x^2-2x+t^2-1 \leqq 0$ をみたす実数 x が存在する」

$\Leftrightarrow \frac{D}{4}=2-t^2 \geqq 0$ 　（$x^2-2x+t^2-1=0$ の判別式を D とした）

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ 　$\cdots\cdots$(答)

問2

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}(x^2+t^2) \\ y=x+\frac{1}{2} \end{cases}$$

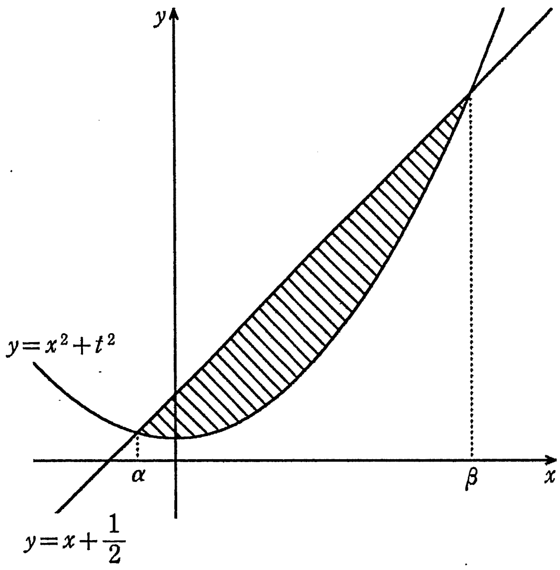
2式より y を消去して整理すると

$$x^2-2x+t^2-1=0$$

$$\therefore\ x=1\pm\sqrt{2-t^2}$$

この2解を α，β $(\alpha \leqq \beta)$ とする.

$(*)$ より，$S(t)$ は右図の斜線部分の面積であるから



$$S(t)=\int_\alpha^\beta\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(x^2+t^2)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\left\{\left(1+\sqrt{2-t^2}\right)-\left(1-\sqrt{2-t^2}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{2-t^2}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-t^2}\right)^3 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

問3

K の体積を V とすると，問1と問2より

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} S(t)\,dt$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-t^2}\right)^3 dt$$

$t=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと

$$dt=\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$$

t	$0 \to \sqrt{2}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって

$$V=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\cos\theta)^3\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\theta+\cos^22\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3+4\cos2\theta+\cos4\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\left[3\theta+2\sin2\theta+\frac{1}{4}\sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=\pi$ ……(答)

【参考】

Sは，放物線$y=\frac{1}{2}x^2$をy軸のまわりに回転して得られる曲面である．

このことは，次のようにして証明できる．

放物線$y=\frac{1}{2}x^2$をy軸のまわりに回転してできる曲面を

平面$y=k$ ($k\geqq0$) で切ると，$k>0$ のとき，断面は

点$(0,\ 0,\ k)$を中心とする円であり，その半径は$y=\frac{1}{2}x^2$

と$y=k$の交点のy座標の絶対値である$\sqrt{2k}$に等しい．

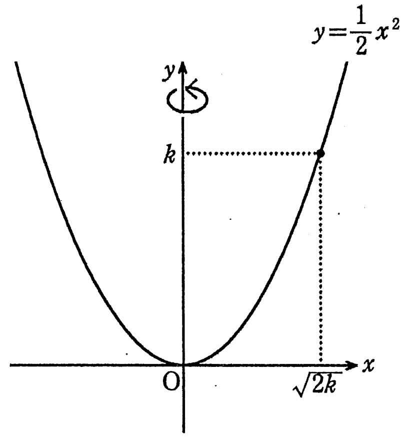
また，$k=0$ のとき，断面は点$(0,\ 0,\ 0)$となる．

よって，断面を表す方程式は

$x^2+z^2=(\sqrt{2k})^2$ かつ $y=k$

ゆえに，曲面Sを表す方程式は

$x^2+z^2=2y$ つまり $y=\frac{1}{2}(x^2+z^2)$



第４問

問１

k 回とも異なる球を取り出す場合の数は，

$$ {}_n\mathrm{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!} $$

であるから，求める確率 $P(n,\ k)$ は

$$ P(n,\ k) = \frac{{}_n\mathrm{P}_k}{n^k} = \boldsymbol{\frac{n!}{n^k(n-k)!}} \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{答}) $$

問２

$$ \begin{aligned} (P(n,\ k))^n &= \left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot\frac{n-k+1}{n}\right)^n \\ &= 1^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot\left\{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{\frac{n}{k-1}}\right\}^{k-1} \end{aligned} $$

$1 \leqq l \leqq k-1$ について，$n \to \infty$ のとき，$\dfrac{l}{n} \to +0$ であるから，

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(P(n,\ k))^n &= e^{-1}\cdot e^{-2}\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot e^{-(k-1)} \\ &= e^{-\{1+2+3+\cdots+(k-1)\}} \\ &= e^{-\frac{(k-1)k}{2}} \end{aligned} $$

ゆえに，$\boldsymbol{Q(k) = e^{-\frac{(k-1)k}{2}}}$ $\cdots\cdots\cdots$(答)

問３

$$ \begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log Q(k)} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{-2}{(k-1)k} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{-2\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{-2} \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned} $$