2021年度 大阪市立大学 前期 数学 文系

第１問

問１

$S_n = 1 + 3 + \cdots + n$ は，初項 1，公差 2 の等差数列の，$\dfrac{n+1}{2}$ 項の和であるから，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\cdot(1+n)\cdot\frac{n+1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(n+1)^2} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} T_n &= 1^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(2k-1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(4k^2-4k+1) \\ &= 4\cdot\left\{\frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\cdot\left(2\cdot\frac{n+1}{2}+1\right)\right\} \\ &\qquad\qquad -4\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\right\}+\frac{n+1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

問２

$(n+1)^2$ と n が共通の素因数 p をもつと仮定すると，

$$\begin{cases} (n+1)^2 = ap \\ n = bp \end{cases} \qquad (a, b \text{ は整数})$$

と表せる。n を消去すると，

$$\begin{aligned} (bp+1)^2 &= ap \\ 1 &= p(a - b^2p - 2b) \end{aligned}$$

となるが，p は素数であり，$(a - b^2p - 2b)$ は整数であるから，矛盾。

したがって，$(n+1)^2$ と n は互いに素である。　　（証明終わり）

$\boxed{\text{別解}}$ （ユークリッドの互除法を利用する証明）

$(n+1)^2 = n\cdot(n+2)+1$

であるから，$(n+1)^2$ と n の最大公約数は n と 1 の最大公約数と等しく 1 である。

したがって，$(n+1)^2$ と n は互いに素である。　　（証明終わり）

問 3

S_n が n で割り切れるとすると，$S_n = cn$ (c は整数) と表せる。

問 1 より　$\dfrac{1}{4}(n+1)^2 = cn$

$$\frac{(n+1)^2}{n} = 4c$$

問 **2** より $(n+1)^2$ と n は互いに素だから，$n \geqq 3$ のとき $\dfrac{(n+1)^2}{n}$ は整数にはならないが，

$4c$ は整数なので矛盾。したがって，S_n は n で割り切れない。　　（証明終わり）

問 4

T_nが n で割り切れる $\iff$ $\dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)$ が整数

であり，n は奇数より $n+1$ は偶数なので，$(n+1)(n+2)$ は偶数となるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(n+1)(n+2)\text{ が整数} &\iff (n+1)(n+2)\text{ が } 3 \text{ の倍数}\\ &\iff n+1,\ n+2 \text{ のいずれかが } 3 \text{ の倍数}\\ &\iff n \text{ が } 3 \text{ で割り切れない}\end{aligned}$$

したがって，T_n が n で割り切れる条件は，**n が 3 で割り切れない** ことである。……　（答）

第２問

問１

裏が出ると１だけ進み，表が出ると２だけ進む。

点Ｐの座標が１となるのは，１回目に裏が出るときなので，

$$p_1 = 1 - \alpha \qquad \cdots\cdots(答)$$

点Ｐの座標が２となるのは，１回目に表が出る または２回ともに裏が出るときなので，

$$p_2 = \alpha + (1-\alpha)^2 = \alpha^2 - \alpha + 1 \qquad \cdots\cdots(答)$$

点Ｐの座標が３となるのは，２回目までに表，裏が１回ずつ出る または３回とも裏が出るときなので，

$$\begin{aligned} p_3 &= {}_2\mathrm{C}_1\, \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^3 \\ &= -\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1 \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

問２

点Ｐの座標が $n+2$ となるのは，１回目に裏が出て $n+1$ 進む または１回目に表が出て n 進むときであるので，

$$p_{n+2} = (1-\alpha)p_{n+1} + \alpha p_n \qquad \cdots\cdots①$$

①より

$$\begin{cases} p_{n+2} - p_{n+1} = -\alpha(p_{n+1} - p_n) & \cdots\cdots② \\ p_{n+2} + \alpha p_{n+1} = p_{n+1} + \alpha p_n & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②より，$p_{n+1} - p_n = (-\alpha)^{n-1}(p_2 - p_1) = (-\alpha)^{n+1} \qquad \cdots\cdots④$

③より，$p_{n+1} + \alpha p_n = p_2 + \alpha p_1 = 1 \qquad \cdots\cdots ⑤$

⑤ − ④から，$(\alpha+1)p_n = 1 - (-\alpha)^{n+1}$

よって，$p_n = \dfrac{1-(-\alpha)^{n+1}}{1+\alpha} \qquad \cdots\cdots(答)$

問３

点Ｐの座標が n になるまでに，コインを投げた回数が多いほど α の次数が高くなる。

コインを投げた回数が最大となるのは，n 回とも裏が出たときである。その確率は

$$(1-\alpha)^n$$

コインを投げた回数が２番目に多くなるのは，１回目から $n-2$ 回目の中で，１回だけ表が出て，$n-3$ 回は 裏が出るときである。その確率は

$${}_{n-2}\mathrm{C}_1\, \alpha(1-\alpha)^{n-3}$$

ゆえに，α の多項式 $p_n - (1-\alpha)^n$ の最も次数の高い項の係数は，

${}_{n-2}\mathrm{C}_1\, \alpha(1-\alpha)^{n-3}$ の α^{n-2} の係数である。

$$(1-\alpha)^{n-3} = {}_{n-3}\mathrm{C}_0 + {}_{n-3}\mathrm{C}_1(-\alpha) + {}_{n-3}\mathrm{C}_2(-\alpha)^2 + \cdots\cdots + {}_{n-3}\mathrm{C}_{n-3}(-\alpha)^{n-3}$$

よって，求める係数は，$(n-2)(-1)^{n-1} \qquad \cdots\cdots(答)$

第3問

$$C_t : y = 3tx^2 - t^3 \iff t^3 - 3x^2t + y = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$f(t) = t^3 - 3x^2t + y = 0$ とおくと，$f'(t) = 3t^2 - 3x^2$

(i) $x = 0$ のとき，$f'(t) = 3t^2 \geqq 0$ より，$f(t)$ は単調増加である。

(ii) $x \neq 0$ のとき，$f'(t) = 3(t + x)(t - x)$ より，$f(t)$ は極値 $f(x)$ と $f(-x)$ をもつ。

問1

題意は，「方程式 ① を満たす異なる3個の実数解 t が存在する」すなわち，「曲線 $z = f(t)$ と t 軸が異なる3点で交わる」ような実数 x, y の条件を求めることである。つまり，$f(t)$ は極値をもち，(極大値)・(極小値) < 0 である。

よって

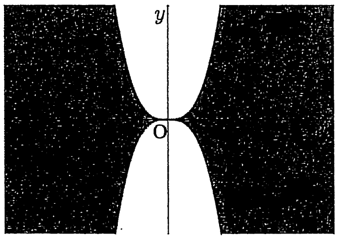
$$x \neq 0 \text{ かつ } f(x) \cdot f(-x) < 0$$
$$\iff (y + 2x^3)(y - 2x^3) < 0$$

この不等式が成り立つことは

$$\begin{cases} y > -2x^3 \\ y < 2x^3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

または
$$\begin{cases} y < -2x^3 \\ y > 2x^3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つことと同値である。よって，求める領域は，② または ③ であり，図の塗布部分になる。ただし，境界線は含まない。



問2

問1と同様にして，題意は「曲線 $z = f(t)$ と t 軸が1点で交わる」ような実数 x, y の条件を求めることである。

(i) のとき，曲線 $z = f(t)$ と t 軸は1点で交わり，題意は満たされる。

よって　　$x = 0$　　$\cdots\cdots ④$

(ii) のとき，題意を満たす条件は，(極大値)・(極小値) > 0，すなわち

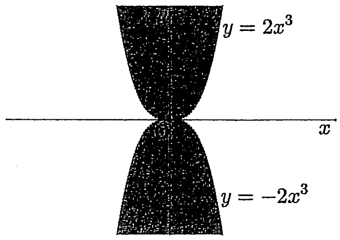
$$(y + 2x^3)(y - 2x^3) > 0$$

である。この不等式が成り立つことは

$$\begin{cases} y > -2x^3 \\ y > 2x^3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

または
$$\begin{cases} y < -2x^3 \\ y < 2x^3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つことと同値である。よって，求める領域は，④ または ⑤ または ⑥ をみたす領域であり，図の塗布部分になる。ただし，境界は原点 O(0,0) を含み，他は含まない。



第４問

3点A，B，Cは原点Oを中心とする半径1の球面上に存在するので，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=$
である。

問1

△OABの面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot 1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\quad\cdots\cdots(答)$$

問2

CP ⊥平面OABより，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$である。

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より

$$(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$a|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}=0\quad\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$$(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$a\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{6}=0\quad\cdots\cdots②$$

①，②を連立して a,b の値を求めると，

$$a=\frac{5}{9},\ b=-\frac{4}{9}\quad\cdots\cdots(答)$$

問3

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\left|\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$=\frac{1}{81}|5\overrightarrow{\mathrm{OA}}-4\overrightarrow{\mathrm{OB}}-9\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$=\frac{1}{81}(25|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+16|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+81|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-40\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+72\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-90\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=\frac{1}{81}\left\{25\cdot 1^2+16\cdot 1^2+81\cdot 1^2-40\cdot\frac{1}{2}+72\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)-90\cdot\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{60}{81}$$

ゆえに，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{2\sqrt{15}}{9}$ である。これと(1)の結果を用いて，四面体OABCの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{15}}{9}=\frac{\sqrt{5}}{18}\quad\cdots\cdots(答)$$