# 2021年度 東北大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$ $$y = ax^2 + bx + 1 \quad \cdots\cdots ①$$

(i) $a = 0$ のとき: ① は $y = bx + 1$ であり，① のグラフは点 $(0,\ 1)$ を通る直線であるから，① が $x$ 軸の正の部分と共有点をもたない条件は

$$b \geqq 0$$

である．

(ii) $a \neq 0$ のとき：① のグラフは点 $(0,\ 1)$ を通る放物線であり

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4a}$$

と変形される．軸の位置で場合分けする

(ア) $-\dfrac{b}{2a} \leqq 0$ のとき

① が $x$ 軸の正の部分と共有点をもたない条件は

$$a > 0$$

である．(ア) の範囲とあわせると

$$a > 0 \text{ かつ } b \geqq 0$$

である．

(イ) $-\dfrac{b}{2a} \geqq 0$ のとき

① が $x$ 軸の正の部分と共有点をもたない条件は

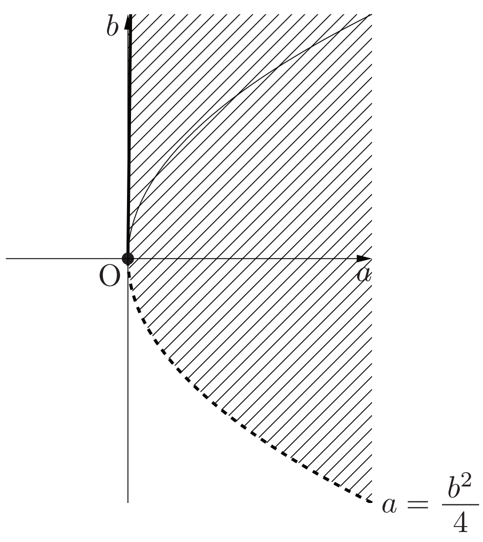
$$\begin{cases} a > 0 \\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0 \\ 1 - \dfrac{b^2}{4a} > 0 \end{cases}$$

(イ) の範囲とあわせると

$$a > 0 \text{ かつ } b \leqq 0 \text{ かつ } a > \frac{b^2}{4}$$

である．

以上，(i)，(ii) より，求める領域は下図の斜線部分となる．ただし，境界の破線部分は除く．



(注)　$a \neq 0$ のときは，$x$ の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + 1 = 0$$

の判別式を $D = b^2 - 4a$ として，求める条件は，

$$D < 0 \text{ または “} D \geqq 0 \text{ かつ（2 解の和が 0 以下）かつ（2 解の積が 0 以上）”}$$

であり，解と係数の関係も用い，

$$a > \frac{b^2}{4} \text{ または “} a \leqq \frac{b^2}{4} \text{ かつ } -\frac{b}{a} \leqq 0 \text{ かつ } \frac{1}{a} \geqq 0 \text{”}$$

すなわち，

$$a > \frac{b^2}{4} \text{ または “} a \leqq \frac{b^2}{4} \text{ かつ } b \geqq 0 \text{ かつ } a > 0 \text{”}$$

となる．このようにしてもよい．

$\boxed{2}$

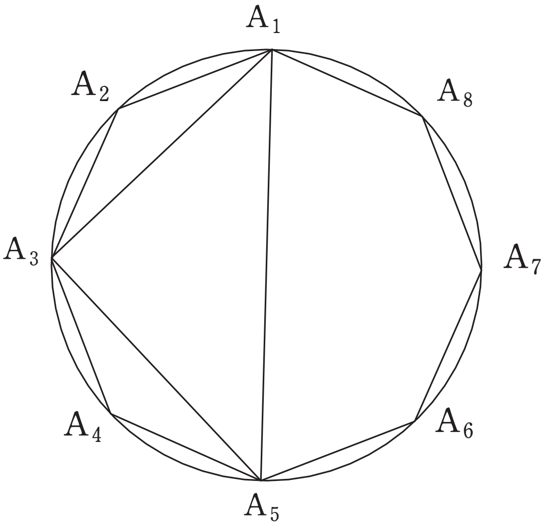
(1)　3 個の頂点を結んでできる三角形が直角三角形になるのは，1 つの辺が正八角形の外接円の直径となる場合である．

線分 $A_1A_5$ を斜辺にもつ直角三角形の $A_1, A_5$ 以外の頂点の選び方は 6 通りある．

線分 $A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8$ を斜辺にもつ場合も同様であるから，直角三角形の個数は，全部で

$$6\cdot 4=24$$

である．




(2)　正八角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$ の 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数は全部で

$${}_8C_3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$$

である．このうち二等辺三角形の個数を求める．

$A_1$ を頂角とする二等辺三角形は，$A_1A_2A_8, A_1A_3A_7, A_1A_4A_6$ の 3 個あり，どれも正三角形ではないが，$A_1A_3A_7$ は直角二等辺三角形である．他の頂点を頂角とする二等辺三角形も同様であるから，直角二等辺三角形でない二等辺三角形の個数は全部で

$$2\cdot 8=16$$

である．

(1) と合わせて，正八角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$ の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形または二等辺三角形であるものは，$24+16=40$ 個あるから，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数は

$$56-(24+16)=16$$

である．

(3)　正八角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$ の 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，(*) を満たすものは，辺の 1 つ，または対角線の 1 つが正八角形の外接円の直径となる場合である．

（ i ）辺の 1 つが正八角形の外接円の直径となる場合

線分 $A_1A_5$ を 1 つの辺にもつ四角形は，$A_1, A_5$ 以外の 2 つの頂点の選び方を考えて，${}_3C_2\times 2=6$ 通りある．線分 $A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8$ を 1 つの辺にもつ四角形も同様であるから，辺の 1 つが正八角形の外接円の直径となる四角形の個数は全部で

$$6\cdot 4=24$$

である．

（ ii ）対角線の 1 つが正八角形の外接円の直径となる場合

線分 $A_1A_5$ を 1 つの対角線にもつ四角形は，$A_1, A_5$ 以外の 2 つの頂点の選び方を考えて，${}_3C_1\times{}_3C_1=9$ 個ある．線分 $A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8$ を 1 つの対角線にもつ四角形も同様であるが，2 つの対角線が直径の四角形が全部で ${}_4C_2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$ 個あるから，対角線の 1 つが正八角形の外接円の直径となる四角形の個数は全部で

$$9\cdot 4-6=30$$

　である．

（ｉ），（ⅱ）まとめて，(*) を満たす四角形の個数は

$$24+30=54$$

である．

（別解）正八角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$ の 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，(*) を満たすものは，辺の 1 つ，または対角線の 1 つが正八角形の外接円の直径となる場合である．

　線分 $A_1A_5$ を辺または対角線にもつ四角形の個数は，残り 2 つの頂点の選び方を考えて

$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

である．線分 $A_2A_6$, $A_3A_7$, $A_4A_8$ を辺または対角線にもつ四角形についても同様であるが，2 つの直径を対角線にもつ四角形が，${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$ 個あるから，(*) を満たす四角形の個数は

$$15\cdot4-6=54$$

である．

$\boxed{3}$ (1) 円 $C_1$ の半径を $R$ として，$\triangle$OPA に余弦定理を用いると

$$R^2+r^2-2Rr\cos\frac{\pi}{3}=1$$
$$R^2-rR+r^2-1=0$$
$$R=\frac{r\pm\sqrt{4-3r^2}}{2}$$

ここで，$0<r<1$ であり，このとき $\sqrt{4-3r^2}>0$ であることにも注意すると

$$r^2-\left(\sqrt{4-3r^2}\right)^2=4(r^2-1)<0$$

より，$r<\sqrt{4-3r^2}$ であるから，$\dfrac{r-\sqrt{4-3r^2}}{2}<0$ である．

したがって，求める $C_1$ の半径は

$$R=\frac{r+\sqrt{4-3r^2}}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の結果を用いると，$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ であるから，AP$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，OP$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，OA$=1$

したがって，AP : OP : OA $=1:2:\sqrt{3}$ なので

$$\angle\text{PAO}=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) のとき $\angle\text{POA}=\dfrac{\pi}{6}$ であるから，$\angle\text{POQ}=\dfrac{\pi}{3}$ である．

さらに，線分 PQ は円 $C_2$ の直径となる．

よって，円 $C_1$ の内部と円 $C_2$ の内部の共通部分は，扇形 OPQ から $\triangle$OPQ を取り除いたものと直径 PQ の半円を合わせたものであるから，求める面積は

$$\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}+\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{18}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{4}$

(1) 曲線 $y=x^3+x^2$ を $C_1$，$y=x^2+4x+16$ を $C_2$ とする．

$(x^3+x^2)'=3x^2+2x$ より，$C_1$ 上の点 $(t,\ t^3+t^2)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+t^2)=(3t^2+2t)(x-t) \qquad \therefore\quad y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2$$

これが $C_2$ と接するための条件は

$$x^2+4x+16=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2$$
$$x^2-(3t^2+2t-4)x+2t^3+t^2+16=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が，重解をもつことなので

$$(3t^2+2t-4)^2-4(2t^3+t^2+16)=0$$
$$9t^4+4t^3-24t^2-16t-48=0$$
$$(t+2)(t-2)(9t^2+4t+12)=0$$

ここで，$9t^2+4t+12=9\left(t+\dfrac{2}{9}\right)^2+\dfrac{104}{9}>0$ であるから，$t=\pm 2$ である．

したがって，求める接線の方程式は

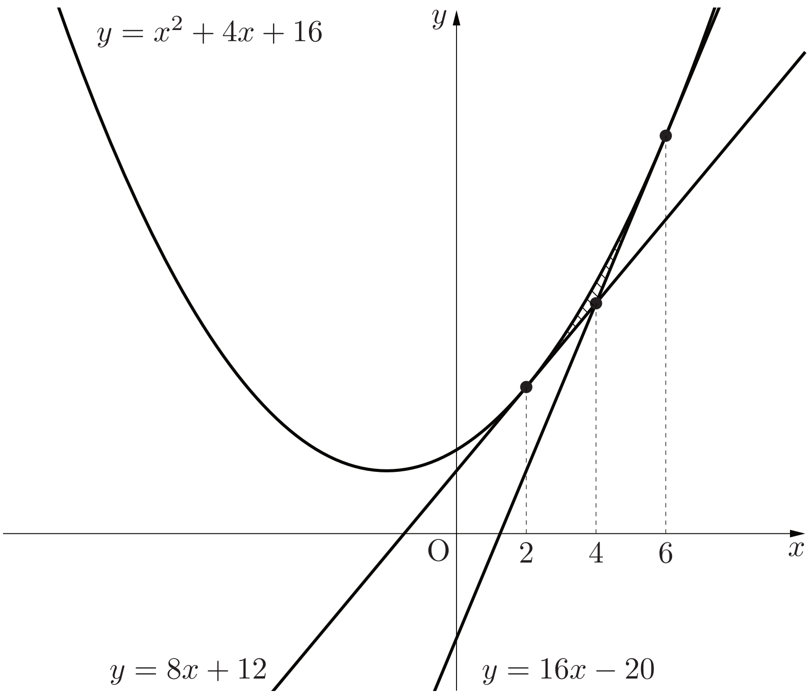
$$y=8x+12\ (t=-2),\quad y=16x-20\ (t=2) \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 2 接線と $C_2$ の接点の $x$ 座標は，$t=-2$，$t=2$ のときの ① の重解 $x=\dfrac{3t^2+2t-4}{2}$ であるから

$y=8x+12$ と $C_2$ の接点の $x$ 座標は，$x=\dfrac{12-4-4}{2}=2$

$y=16x-20$ と $C_2$ の接点の $x$ 座標は，$x=\dfrac{12+4-4}{2}=6$

また，2 接線の交点の $x$ 座標は 4 である．



したがって，求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_2^4 \{(x^2+4x+16)-(8x+12)\}\,dx+\int_4^6 \{(x^2+4x+16)-(16x-20)\}\,dx\\
&=\int_2^4 (x-2)^2\,dx+\int_4^6 (x-6)^2\,dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^4+\left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_4^6\\
&=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\\
&=\frac{16}{3}
\end{aligned}$$

……（答）