2021年度 東京医科歯科大学 前期 数学

1

a_i （$i=1,\ 2,\ 3$）は $0,\ 1,\ \cdots,\ 9$ をそれぞれ確率 $\dfrac{1}{10}$ でとることに注意する．……①

(1)
$$b_1+b_2+b_3=60+a_1+a_2+a_3 \qquad \cdots\cdots②$$
であるから，$b_1+b_2+b_3=70$ となるのは，
$$a_1+a_2+a_3=10 \qquad \cdots\cdots③$$
のときであり，③を満たす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の個数は，a_i （$i=1,\ 2,\ 3$）がすべての 0 以上の整数値をとりうるときには，10 個の○と 2 本の｜を一列に並べる方法の数に等しく，${}_{12}\mathrm{C}_2=66$ 通りであるが，①より，いまは，このうち $(a_1,\ a_2,\ a_3)=(10,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 10,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 10)$ の 3 通りはあり得ないから，$66-3=63$ 通りである．

よって，求める確率は，
$$63\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{63}{1000}$$
である．

《注》 ③を満たす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，$a_1,\ a_2,\ a_3$ の中に，

0，1，9 が 1 つずつ	0，2，8 が 1 つずつ	0，3，7 が 1 つずつ
0，4，6 が 1 つずつ	0 が 1 つ，5 が 2 つ	1 が 2 つ，8 が 1 つ
1，2，7 が 1 つずつ	1，3，6 が 1 つずつ	1，4，5 が 1 つずつ
2 が 2 つ，6 が 1 つ	2，3，5 が 1 つずつ	2 が 1 つ，4 が 2 つ
3 が 2 つ，4 が 1 つ		

のいずれかが現れるものであり，$8\cdot 3!+5\cdot {}_3\mathrm{C}_1=63$ 通りとしてもよい．

(2) ①より，$a_1+a_2+a_3=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 27$ であるから，②より，

$a_1+a_2+a_3=0,\ 1,\ \cdots,\ 4$ のとき $c_4=60$ ……④

$a_1+a_2+a_3=5,\ 6,\ \cdots,\ 14$ のとき $c_4=70$ ……⑤

$a_1+a_2+a_3=15,\ 16,\ \cdots,\ 24$ のとき $c_4=80$ ……⑥

$a_1+a_2+a_3=25,\ 26,\ 27$ のとき $c_4=90$ ……⑦

である．

⑦を満たす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，$a_1,\ a_2,\ a_3$ の中に，

7 が 1 つ，9 が 2 つ	8 が 2 つ，9 が 1 つ	8 が 1 つ，9 が 2 つ
9 が 3 つ		

のいずれかが現れるものであり，$3\cdot {}_3\mathrm{C}_1+1=10$ 通りである．

よって，求める確率は，
$$10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{1}{100}$$
である．

(3) $b_1=10+a_1$ であるから，①より，

$a_1=0,\ 1,\ \cdots,\ 4$ のとき $c_1=10$，$a_1=5,\ 6,\ \cdots,\ 9$ のとき $c_1=20$ ……⑧

であり，

$a_2=0,\ 1,\ \cdots,\ 4$ のとき $c_2=20$，$a_2=5,\ 6,\ \cdots,\ 9$ のとき $c_2=30$ ……⑨

$a_3=0,\ 1,\ \cdots,\ 4$ のとき $c_3=30$，$a_3=5,\ 6,\ \cdots,\ 9$ のとき $c_3=40$ ……⑩

となる．

よって，$c_1=20$ となるのは，

$$(c_1,\ c_2,\ c_3)=(20,\ 20,\ 30),\ (20,\ 20,\ 40),\ (20,\ 30,\ 30),\ (20,\ 30,\ 40)$$

のいずれかのときである．

(i)　$(c_1,\ c_2,\ c_3)=(20,\ 20,\ 30)$ のとき

⑧，⑨，⑩より，$a_1+a_2+a_3 \geqq 5$ であるから，④，⑤，⑥，⑦より，$c_4 \geqq 70$ であり，$c_1+c_2+c_3>c_4$ を満たす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，④，⑧より，存在しない．

(ii)　$(c_1,\ c_2,\ c_3)=(20,\ 20,\ 40)$ のとき

⑧，⑨，⑩より，$a_1+a_2+a_3 \geqq 10$ であるから，④，⑤，⑥，⑦より，$c_1+c_2+c_3>c_4$ となるのは，$c_4=70$ であり，$a_1+a_2+a_3=10,\ 11,\ \cdots,\ 14$ のときである．

このとき，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，

$$a_1-5=0,\ 1,\ \cdots,\ 4\ ;\ a_2=0,\ 1,\ \cdots,\ 4\ ;\ a_3-5=0,\ 1,\ \cdots,\ 4\ ;$$
$$(a_1-5)+a_2+(a_3-5)=0,\ 1,\ \cdots,\ 4$$

を満たすから，4 個の○と 3 本の｜を一列に並べる方法の数に等しく，${}_7\mathrm{C}_3=35$ 通りである．

(iii)　$(c_1,\ c_2,\ c_3)=(20,\ 30,\ 30)$ のとき

⑧，⑨，⑩より，$a_1+a_2+a_3 \geqq 10$ であるから，④，⑤，⑥，⑦より，$c_1+c_2+c_3>c_4$ となるのは，$c_4=70$ であり，$a_1+a_2+a_3=10,\ 11,\ \cdots,\ 14$ のときである．

このとき，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，

$$a_1-5=0,\ 1,\ \cdots,\ 4\ ;\ a_2-5=0,\ 1,\ \cdots,\ 4\ ;\ a_3=0,\ 1,\ \cdots,\ 4\ ;$$
$$(a_1-5)+(a_2-5)+a_3=0,\ 1,\ \cdots,\ 4$$

を満たすから，同様に，${}_7\mathrm{C}_3=35$ 通りである．

(iv)　$(c_1,\ c_2,\ c_3)=(20,\ 30,\ 40)$ のとき

⑧，⑨，⑩より，$a_1+a_2+a_3 \geqq 15$ であるから，④，⑤，⑥，⑦より，$c_4=80,\ 90$ であり，$c_1+c_2+c_3>c_4$ となるのは，$c_4=80$ のときである．

よって，(2)の 10 通りがすべて $(c_1,\ c_2,\ c_3)=(20,\ 30,\ 40)$ を満たすことに注意すると，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は $5^3-10=115$ 通りである．

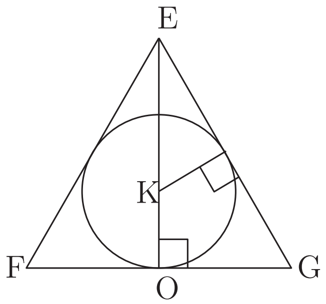
以上より，求める確率は，

$$(35+35+115)\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{37}{200}$$

である．

2

(1)



AB，CD と yz 平面の交点をそれぞれ F，G とすると，P の yz 平面による断面は上図のようになる．

$$\mathrm{F}(0,\ a,\ 0),\ \mathrm{G}(0,\ -a,\ 0)$$

であるから，P の yz 平面による断面の周の長さが 1 であるとき，図より，

$$2\sqrt{a^2+h^2}+2a=1\ \cdots\cdots①\qquad \therefore\quad h^2=\frac{1}{4}-a$$

となる．したがって，$a>0,\ h>0$ より，a のとり得る値の範囲は，

$$0<a<\frac{1}{4}\ \cdots\cdots②$$

であり，

$$h=\sqrt{\frac{1}{4}-a}\cdots\cdots③$$

である．

(2)　球 S が P のすべての面に接するとき，図形の対称性により，S の yz 平面による断面は S の中心 K を通り，この断面の円は (1) の三角形 EFG の内接円となる．したがって，球 S の半径を r とするとき，三角形 EFG の面積を 2 通りに表すと，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{FG}\cdot\mathrm{EO}=\frac{1}{2}(\mathrm{EF}+\mathrm{FG}+\mathrm{EG})r$$

となり，三角形 EFG の周の長さが 1 であること，すなわち，$\mathrm{EF}+\mathrm{FG}+\mathrm{EG}=1$ を用いると，

$$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h=\frac{1}{2}r\qquad\therefore\quad r=2ah$$

となり，③ を用いると，

$$r=2ah=2a\sqrt{\frac{1}{4}-a}=2\sqrt{\frac{1}{4}a^2-a^3}$$

となる．S の体積が最大となるとき，すなわち，r が最大となる a の値を求めればよいか

ら，$f(a)=\dfrac{1}{4}a^2-a^3$ とおき，② における $f(a)$ の増減を調べる．

$$f(a)=\frac{1}{2}a-3a^2=3a\left(\frac{1}{6}-a\right)$$

より，$f(a)$ の増減は下表のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{4}\right)$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，S の半径 $r=2\sqrt{f(a)}$ は，

$$a=\frac{1}{6}$$

のときに最大になり，このとき，S の体積が最大になる．

(3)　Q の 6 つの面のうち，xy 平面上にある面を T とし，T に平行な Q の面を T' とする．T' を含む平面を $z=b\ (0<b<h)$ とし，この平面と AE，BE，CE，DE の交点を順に K，L，M，N とすると，四角形 KLMN は P の底面 BCDE に相似で正方形である．T' は正方形 KLMN に含まれるから，T' が最大になるのは，KLMN に一致するときである．Q の体積を最大にすることを考えるから，T' が KLMN に一致するとしてよい．$\mathrm{KL}=x$ とおくと，2 つの四角錐 E-ABCD と E-KLMN が相似であることにより，

$$\frac{h-b}{x}=\frac{h}{2a}\qquad\therefore\quad x=2a\left(1-\frac{b}{h}\right)$$

となり，このときの Q の体積を V とすると，

$$V=x^2b=4a^2\left(1-\frac{b}{h}\right)^2b$$

となる．まず，② を満たす a を任意に一つ固定して，$0<b<h$ で定義された関数 V を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{dV}{db}&=4a^2\left\{2\left(1-\frac{b}{h}\right)\cdot\left(-\frac{1}{h}\right)\cdot b+\left(1-\frac{b}{h}\right)^2\right\}\\&=4a^2\left(1-\frac{b}{h}\right)\left(1-\frac{3b}{h}\right)\end{aligned}$$

より，V の増減は下表のようになる．

b	(0)	$\cdots$	$\frac{h}{3}$	$\cdots$	(h)
$\frac{dV}{db}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，b の関数 V は $b=\dfrac{h}{3}$ のとき最大になり，その最大値は，

$$4a^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{h}{3}=\frac{16}{27}a^2h$$

となるから，③ を用いると，

$$V(a)=\frac{16}{27}a^2\sqrt{\frac{1}{4}-a}$$

である．$V(a)=\dfrac{16}{27}\sqrt{\dfrac{1}{4}a^4-a^5}$ となるから，$g(a)=\dfrac{1}{4}a^4-a^5$ とおき，② における $g(a)$ の増減を調べる．

$$g'(a)=a^3-5a^4=5a^3\left(\frac{1}{5}-a\right)$$

より，$g(a)$ の増減は下表のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{5}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{1}{4}\right)$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，$V(a)$ は，

$$a=\frac{1}{5}$$

のとき，最大値

$$\frac{16}{27}\sqrt{g\left(\frac{1}{5}\right)}=\frac{8\sqrt{5}}{3375}$$

をとる．

3

⑴　$f(x)=b\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$ とおくと，

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{b}{a}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{bx}{a\sqrt{a^2+x^2}}$$

であるから，点$(u,\ f(u))$におけるCの接線の方程式は，

$$y=\frac{bu}{a\sqrt{a^2+u^2}}(x-u)+\frac{b}{a}\sqrt{a^2+u^2}$$

$$\therefore\quad y=\frac{b}{a\sqrt{a^2+u^2}}(ux+a^2) \qquad \cdots\cdots①$$

である．

⑵　点$(x,\ y)$がC上の異なる2点における接線の交点である条件は，①を満たす相異なる2個以上の実数uが存在することであり，①の右辺を$g(u)$とおくと，それは，uv平面上の曲線$v=g(u)$と直線$v=y$が異なる2個以上の共有点をもつ……② ことである．

いま，

$$g(u)=\frac{b}{a}\cdot\frac{xu+a^2}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

$$g'(u)=\frac{b}{a}\cdot\frac{x\cdot\sqrt{a^2+u^2}-(xu+a^2)\cdot\dfrac{2u}{2\sqrt{a^2+u^2}}}{(\sqrt{a^2+u^2})^2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2(x-u)}{(\sqrt{a^2+u^2})^3}$$

より，$g(u)$の増減は右表のようになり，$u\neq 0$のとき，

u	$\cdots$	x	$\cdots$
$g'(u)$	$+$	0	$-$
$g(u)$	$\nearrow$	$\frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$	$\searrow$

$$g(u)=\frac{b}{a}\cdot\frac{x\cdot\dfrac{u}{|u|}+\dfrac{a^2}{|u|}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{u^2}+1}}$$

であることより，

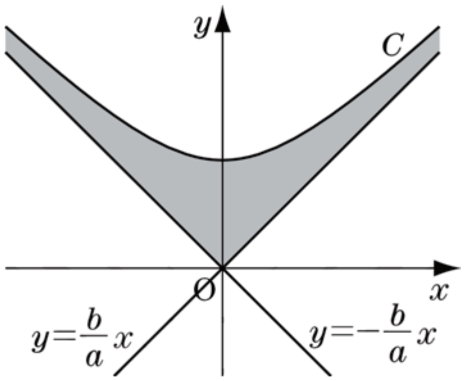
$$\lim_{u\to-\infty}g(u)=-\frac{b}{a}x,\quad \lim_{u\to\infty}g(u)=\frac{b}{a}x$$

である．

よって，②より，求める領域は，

$$\max\left(-\frac{b}{a}x,\ \frac{b}{a}x\right)<y<\frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$$

（ただし，$\max(p,\ q)$はpとqのうち小さくない方を表す）であり，右図の網目部分（境界を含まない）のようになる．



⑶　⑵の経過より，⑵の領域にある点$(p,\ q)$について，点$(p,\ q)$を通るCの接線の接点は2個である．

いま，①は，

$$y=\frac{b^2(ux+a^2)}{a^2f(u)}$$

であるから，その2個の接点を$(u_1,\ f(u_1))$，$(u_2,\ f(u_2))$とすると，接線は，それぞれ，

$$y=\frac{b^2(u_1x+a^2)}{a^2f(u_1)},\quad y=\frac{b^2(u_2x+a^2)}{a^2f(u_2)}$$

となり，これらがともに点$(p,\ q)$を通ることより，

$$q=\frac{b^2(u_1p+a^2)}{a^2f(u_1)},\quad q=\frac{b^2(u_2p+a^2)}{a^2f(u_2)}$$

$$\therefore\quad f(u_1)=\frac{b^2}{a^2q}(pu_1+a^2),\quad f(u_2)=\frac{b^2}{a^2q}(pu_2+a^2)$$

が成り立つ．

これらは，2点$(u_1,\ f(u_1))$，$(u_2,\ f(u_2))$がともに直線

$$y=\frac{b^2}{a^2q}(px+a^2)$$

上にあることを示すから，これが求める直線の方程式である．