2021年度 筑波大学 前期 数学

〔1〕

C_1，C_2 の方程式を変形すると

$$C_1 : (x-1)^2+(y+2)^2=16$$

$$C_2 : (x-4)^2+(y-2)^2=20-k$$

となるから，C_2 が円を表す条件は

$$k<20 \quad \cdots\cdots ①$$

である．C_1 の中心を $\mathrm{O_1}(1,\ -2)$，半径を $r_1=4$，C_2 の中心を $\mathrm{O_2}(4,\ 2)$，半径を $r_2=\sqrt{20-k}$ とする．

(1) 2円 C_1，C_2 が外接するから

$$\mathrm{O_1O_2}=r_1+r_2$$

$$\sqrt{(1-4)^2+(-2-2)^2}=4+\sqrt{20-k}$$

$$\sqrt{20-k}=1$$

$$\therefore\ k=19 \quad \cdots\cdots（答）$$

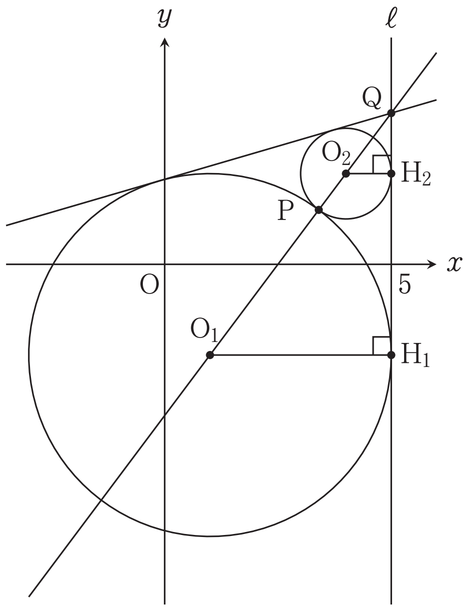
である．（これは ① を満たす）

(2) (1) より $r_2=1$ であるから，点Pは線分ABを $r_1:r_2=4:1$ に内分する点である．よって，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1\cdot1+4\cdot4}{4+1},\ \frac{1\cdot(-2)+4\cdot2}{4+1}\right)\ \text{すなわち}\ \mathrm{P}\left(\frac{17}{5},\ \frac{6}{5}\right) \quad \cdots\cdots（答）$$

である．

(3) $\mathrm{H_1}(5,\ -2)$，$\mathrm{H_2}(5,\ 2)$ とおき，直線 $x=5$ を ℓ とする．$\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$ は ℓ 上の点であり, $\mathrm{O_1H_1}\perp\ell$, $\mathrm{O_2H_2}\perp\ell$ であるから, ℓ は2円 C_1，C_2 の点Pを通らない共通接線の1つである．2円 C_1，C_2 は直線 $\mathrm{O_1O_2}$ に関して対称であるから，点Qは直線 $\mathrm{O_1O_2}$ と ℓ の交点である．直線 $\mathrm{O_1O_2}$ の方程式は



$$y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$$

であるから，点Qの座標は

$$\mathrm{Q}\left(5,\ \frac{10}{3}\right) \quad \cdots\cdots（答）$$

である．

別解

$\triangle\mathrm{O_1QH_1}\backsim\triangle\mathrm{O_2QH_2}$ であり，相似比は $\mathrm{O_1H_1}:\mathrm{O_2H_2}=r_1:r_2=4:1$ であるから

$$\mathrm{O_1Q}:\mathrm{O_2Q}=4:1$$

である．よって，点Qは線分 $\mathrm{O_1O_2}$ を $4:1$ に外分する点である．したがって

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-1\cdot1+4\cdot4}{4-1},\ \frac{-1\cdot(-2)+4\cdot2}{4-1}\right)\ \text{すなわち}\ \mathrm{Q}\left(5,\ \frac{10}{3}\right) \quad \cdots\cdots（答）$$

である．

〔2〕

(1)　$$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$ であるから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

$$-1<t\leqq\sqrt{2}$$ ……（答）

である．

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ のとき

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

であるから

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t$$

$$=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$ ……（答）

である．また

$$\cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta$$

$$=1-2(2\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$=1-2(t^2-1)^2$$

$$=-2t^4+4t^2-1$$ ……（答）

である．

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=\cos 4\theta$ のとき

$$-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t=-2t^4+4t^2-1$$

$$4t^4-t^3-8t^2+3t+2=0$$

$$(t-1)^2(4t^2+7t+2)=0$$

$$t=1,\ \frac{-7\pm\sqrt{17}}{8}$$

である．ここで，$4<\sqrt{17}<5$ に注意すると，$-1<t\leqq\sqrt{2}$ を満たす t の値は，

$$t=1,\ \frac{-7+\sqrt{17}}{8}$$ ……（答）

である．

〔 **3** 〕

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,\ 1,\ 0)-(-2,\ 0,\ 0)=(2,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(0,\ 0,\ 1)-(-2,\ 0,\ 0)=(2,\ 0,\ 1)$$
$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OQ}=(0,\ 5,\ 5)+k(1,\ 1,\ 1)=(k,\ k+5,\ k+5)$$

である．

（１） 点 S は α 上の点であるから，実数 x，y を用いて

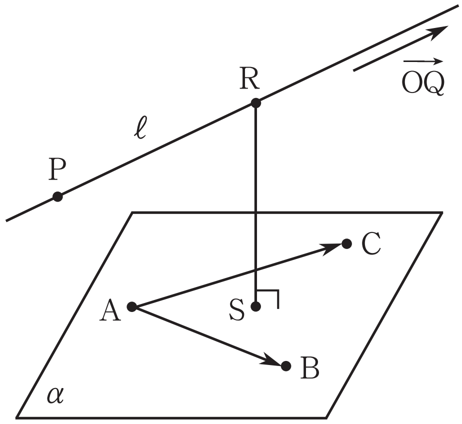
$$\overrightarrow{AS}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots ①$$

とおける．これより

$$\overrightarrow{AS}=x(2,\ 1,\ 0)+y(2,\ 0,\ 1)=(2x+2y,\ x,\ y) \quad \cdots\cdots ②$$

となるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS}&=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AS}\\&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{AS}\\&=(2x+2y-k-2,\ x-k-5,\ y-k-5)\end{aligned}$$



となる．$\overrightarrow{RS}\perp\alpha$ または $\overrightarrow{RS}=\vec{0}$ より

$$\begin{cases}\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$

が成り立つことから

$$\begin{cases}2(2x+2y-k-2)+(x-k-5)=0\\ 2(2x+2y-k-2)+(y-k-5)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x+4y=3k+9\\ 4x+5y=3k+9\end{cases}$$

$$\therefore \quad x=y=\frac{k+3}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

となる．これを ② に代入し，整理すると

$$\overrightarrow{AS}=\frac{k+3}{3}(4,\ 1,\ 1) \quad \cdots\cdots（答）$$

となる．

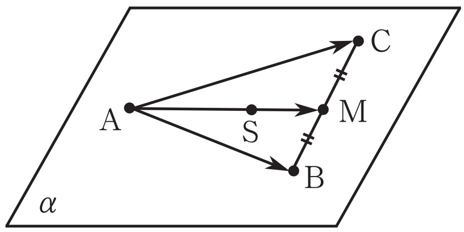
（２） 線分 BC の中点を M とおくと，①，③ より

$$\overrightarrow{AS}=\frac{k+3}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2(k+3)}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{2(k+3)}{3}\overrightarrow{AM}$$

となるから，点 S が △ABC の内部または周にある条件は

$$0\leqq\frac{2(k+3)}{3}\leqq 1$$

$$\therefore \quad -3\leqq k\leqq -\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots（答）$$



が成立することである．

《別解》 ① より，点 S が △ABC の内部または周にある条件は

$$x\geqq 0 \quad かつ \quad y\geqq 0 \quad かつ \quad x+y\leqq 1$$

が成立することである．このことと ③ より

$$\frac{k+3}{3}\geqq 0 \quad かつ \quad 2\cdot\frac{k+3}{3}\leqq 1$$

$$k\geqq -3 \quad かつ \quad k\leqq -\frac{3}{2}$$

$$-3\leqq k\leqq -\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots（答）$$

となる．

〔4〕

(1)　$f(x)=px^{\frac{1}{p}}$，$g(x)=\log x+q$ とおく．2 つの曲線 $C_1: y=f(x)$，$C_2: y=g(x)$ が点 (a,b) で同じ直線に接する条件は，

$$f(a)=g(a)=b \quad \text{かつ} \quad f'(a)=g'(a) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

である．$f'(x)=x^{\frac{1}{p}-1}$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから，$(*)$は

$$pa^{\frac{1}{p}}=\log a+q=b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

かつ

$$a^{\frac{1}{p}-1}=\frac{1}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

と書き直すことができ，$0<p<1$ と②より

$$a^{\frac{1}{p}}=1$$

$$\therefore \quad a=1$$

これを①に代入すると

$$p=q=b$$

$$\therefore \quad q=p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)　(1)より，$a=1$，$b=p$，$q=p$ であり，2 つの曲線

$$C_1: y=f(x)=px^{\frac{1}{p}} \ (x>0)$$

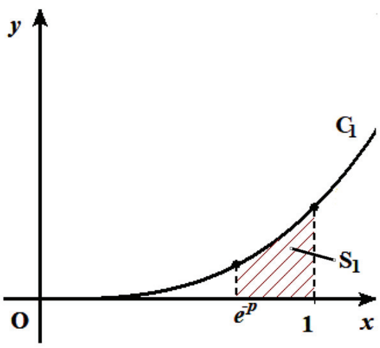
$$C_2: y=g(x)=\log x+p \ (x>0)$$

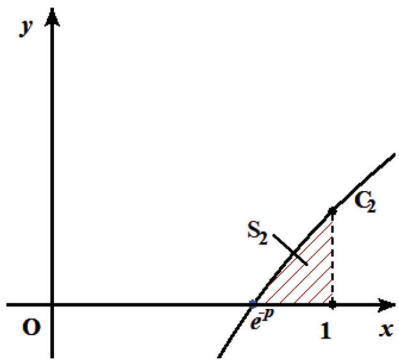
が点 $(1,p)$ で同じ曲線で接している．そして

$S_1=$（C_1，直線 $x=1$，直線 $x=e^{-p}$，x 軸で囲まれた図形の面積）

$S_2=$（C_2，直線 $x=1$，　x 軸で囲まれた図形の面積）

である．





よって，

$$S_1=\int_{e^{-p}}^{1} px^{\frac{1}{p}}dx=\left[\frac{p^2}{p+1}x^{\frac{1}{p}+1}\right]_{e^{-p}}^{1}=\frac{p^2}{p+1}\left(1-e^{-p-1}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

また，

$0=\log x+p$

$\log x=-p$

$x=e^{-p}$

であるから，曲線C_2とx軸は点$\left(e^{-p},0\right)$で交わる．したがって，

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{e^{-p}}^{1}\left(\log x+p\right)dx=\left[x\log x-x+px\right]_{e^{-p}}^{1}\\&=\left(-1+p\right)-\left(-pe^{-p}-e^{-p}+pe^{-p}\right)\\&=e^{-p}+p-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(3)　$0<p<1$において，示すべき不等式は

$\dfrac{S_2}{S_1}\geqq\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 4S_2-3S_1=4\left(e^{-p}+p-1\right)-3\cdot\dfrac{p^2}{p+1}\left(1-e^{-p-1}\right)\geqq 0$

$\Leftrightarrow 4\left(p+1\right)\left(e^{-p}+p-1\right)-3p^2\left(1-e^{-p-1}\right)\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots③$

と変形できる．この③を示せばよい．③の左辺を$u\left(p\right)$とおくと

$$\begin{aligned}u'\left(p\right)&=4\left(e^{-p}+p-1\right)+4\left(p+1\right)\left(-e^{-p}+1\right)-6p\left(1-e^{-p-1}\right)-3p^2e^{-p-1}\\&=-4pe^{-p}+2p+\left(6p-3p^2\right)e^{-p-1}\\&=pe^{-p-1}\left(-4e+2e^{p+1}+6-3p\right)\end{aligned}$$

さらに$v\left(p\right)=-4e+2e^{p+1}+6-3p$とおくと，$0<p<1$より$pe^{-p-1}>0$であるから，$u'\left(p\right)$と$v\left(p\right)$の符号は一致する．$0<p<1$，$2.5<e<3$より

$v'\left(p\right)=2e^{p+1}-3>2e-3>2\cdot 2.5-3>0$

であるから$0<p<1$で$v\left(p\right)$は単調増加．そして

$v\left(0\right)=6-2e>6-2\cdot 3=0$

と合わせて，$0<p<1$で$v\left(p\right)>0$である．

よって，$0<p<1$で$u'\left(p\right)>0$であるから，$u\left(p\right)$は単調増加．$u\left(0\right)=0$と合わせて，$0<p<1$で$u\left(p\right)>0$である．

したがって，$0<p<1$で不等式③が成り立つので，$\dfrac{S_2}{S_1}\geqq\dfrac{3}{4}$が示された．　（証明終）

〔5〕

(1) $\dfrac{\pi}{4n}=\theta$ とおくと，

$$\angle\mathrm{POB}=\frac{\pi}{n}=4\theta,\ \angle\mathrm{QOB}=\frac{\pi}{2n}=2\theta$$

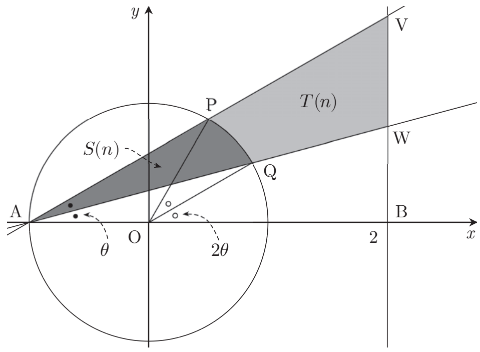
であり，円周角と中心角の関係より，

$$\angle\mathrm{VAB}=\frac{\pi}{2n}=2\theta,\ \angle\mathrm{WAB}=\frac{\pi}{4n}=\theta$$

であるから，

$$\begin{aligned}S(n)+T(n)=\triangle\,\mathrm{AVW}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{VW}\cdot\mathrm{AB}\\&=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{VB}-\mathrm{WB})\cdot\mathrm{AB}\\&=\frac{1}{2}(3\tan 2\theta-3\tan\theta)\cdot 3\\&=\frac{9}{2}(\tan 2\theta-\tan\theta)\end{aligned}$$

である．



よって，$n\to\infty$ のとき $\theta\to+0$ であり，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\{S(n)+T(n)\}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi}{4\theta}\cdot\frac{9}{2}(\tan 2\theta-\tan\theta)\\&=\lim_{\theta\to+0}\frac{9\pi}{4}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{1}{\cos 2\theta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right)\\&=\frac{9\pi}{4}\left(1\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=\frac{9\pi}{8}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{S(n)+T(n)\}-nS(n)}{nS(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\{S(n)+T(n)\}}{nS(n)}-1\right)$$ ……①

と変形できる．

$$\angle\mathrm{AOP}=\pi-\angle\mathrm{POB}=\pi-4\theta,\ \angle\mathrm{AOQ}=\pi-\angle\mathrm{QOB}=\pi-2\theta$$

より，

$$\begin{aligned}S(n)&=\triangle\,\mathrm{OAP}+(\text{扇形 OPQ})-\triangle\,\mathrm{OAQ}\\&=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-4\theta)+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\\&=\frac{1}{2}\sin 4\theta+\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nS(n)&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi}{4\theta}\left(\frac{1}{2}\sin 4\theta+\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\lim_{\theta\to+0}\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4\theta}{4\theta}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)\\&=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot 1\right)=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である．

よって，①と(1)を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}=\frac{\frac{9\pi}{8}}{\frac{\pi}{2}}-1=\frac{5}{4}$$ ……(答)

である．

〔6〕

(1) $$\frac{\omega^2-1}{\omega-1}=\frac{(\omega-1)(\omega+1)}{\omega-1}=\omega+1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 60° 回転させると $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である．（証明終わり）

【別解】

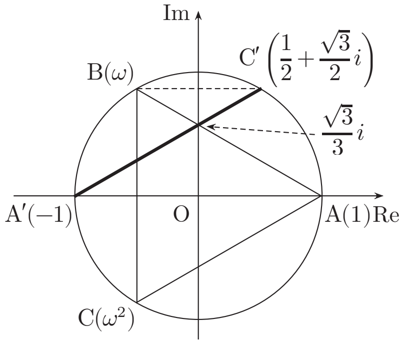
$\omega^3=1$，$|\omega|=1$ であるから，

$$\mathrm{AB}=|w-1|$$
$$\mathrm{BC}=|\omega^2-\omega|=|\omega||\omega-1|=|\omega-1|$$
$$\mathrm{CA}=|1-\omega^2|=|\omega^3-\omega^2|=|\omega^2||\omega-1|=|\omega-1|$$

すなわち，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ が成り立ち，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である．（証明終わり）

(2) 点 $-z$ と点 z は点 $\mathrm{O}(0)$ に関して対称であるから，A，C の点 O に関する対称点をそれぞれ $\mathrm{A}'(-1)$，$\mathrm{C}'\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ とすると，点 $-z$ は線分 $\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ を描く．

よって，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示すると，以下（図の太線部）のようになる．



(3) 辺 AB 上を動く点を z_1，辺 AC 上を動く点を z_2 とすると，E_1 と E_2 の共有点が存在するとき，

$$z_1{}^2=z_2{}^2$$
$$\therefore\quad (z_1-z_2)(z_1+z_2)=0$$
$$\therefore\quad z_1=z_2 \ \cdots\cdots① \text{ または } z_1=-z_2 \ \cdots\cdots②$$

を満たす．①を満たす点は A(1)であり，②を満たす点は(2)より，線分 AB と線分 $\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ の交点である．線分 AB と線分 $\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ は虚軸に関して対称であることから，それらの交点は $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ である．

よって，求める共有点は，

$$1^2=1,\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^2=-\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．