2021年度 東京工業大学 前期 数学

$\boxed{1}$

(1) 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満の整数は

k 桁の正の整数

である．このうち，条件 $(*)$ を満たすものでは

10^{k-1} の位の数は	$1,\ 2,\ \cdots,\ 8$	の 8 通り
10^{k-1} の位以外の位の数はそれぞれ	$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$	の 9 通り

となる．よって

$$a_k = 8\cdot 9^{k-1} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) m を正の整数とし，整数 n が $10^{m-1} \leqq n < 10^m$ を満たすとする．

このような n のうち，条件 $(*)$ を満たすものについて

$$\frac{1}{10^m} < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{10^{m-1}} \quad \text{より} \quad \frac{1}{10^m} < b_n \leqq \frac{1}{10^{m-1}}$$

が成り立ち，それ以外では $b_n = 0$ である．このことにより

$$S_m = \sum_{n=10^{m-1}}^{10^m-1} b_n$$

とおいた S_m に対して次の不等式が成り立つ．

$$S_m \leqq a_m \times \frac{1}{10^{m-1}} = 8\cdot 9^{m-1}\cdot\frac{1}{10^{m-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n = \sum_{m=1}^{k} S_m \leqq \sum_{m=1}^{k} 8\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = 8\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k}{1-\frac{9}{10}} = 80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\} < 80$$

(証明終わり)

$\boxed{2}$

(1) l と E の共有点の x 座標は，方程式

$$\frac{x^2}{4}+(ax+b)^2=1$$

の実数解であり，この方程式を変形すると

$$\left(a^2+\frac{1}{4}\right)x^2+2abx+(b^2-1)=0 \qquad \cdots ①$$

となる．①の判別式を D とおく．D は

$$D=4a^2b^2-4\left(a^2+\frac{1}{4}\right)(b^2-1)=4a^2+1-b^2$$

である．l と E が異なる 2 点を共有するための条件は，$D>0$，すなわち

$$-\sqrt{4a^2+1}<b<\sqrt{4a^2+1} \qquad \cdots (答)$$

である．

(2) l と m がそれぞれ E と異なる 2 点を共有していることより

$$-\sqrt{4a^2+1}<b<\sqrt{4a^2+1},\ -\sqrt{4a^2+1}<c<\sqrt{4a^2+1} \qquad \cdots ②$$

であり，これと

$$b>c \qquad \cdots ③$$

が成立している．$l /\!/ m$ に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となるのは

$$(l\text{ と }E\text{ の 2 交点の }x\text{ 座標の差})=(m\text{ と }E\text{ の 2 交点の }x\text{ 座標の差}) \qquad \cdots ④$$

のときである．ここで，①の解は $x=\dfrac{-4ab\pm2\sqrt{D}}{4a^2+1}$ であるから

$$(l\text{ と }E\text{ の 2 交点の }x\text{ 座標の差})=(\text{①の 2 解の差})=\frac{4\sqrt{D}}{4a^2+1}=\frac{4\sqrt{4a^2+1-b^2}}{4a^2+1}$$

であり，b を c におきかえて

$$(m\text{ と }E\text{ の 2 交点の }x\text{ 座標の差})=\frac{4\sqrt{4a^2+1-c^2}}{4a^2+1}$$

である．よって④は $b^2=c^2$，すなわち $c=\pm b$ となり，これと③より

$$c=-b \qquad \cdots ⑤$$

となる．⑤を②と③に代入して整理すると $0<b<\sqrt{4a^2+1}$ となる．求める条件は，②かつ③かつ⑤，すなわち

$$0<b<\sqrt{4a^2+1},\ c=-b \qquad \cdots ⑥$$

となる．

(3) E に内接する平行四辺形を考える．その平行四辺形の辺を含む 4 直線のうちの 2 本は (2) の l，m のように表すことができ，⑥が成立する．$c=-b$ より，原点のまわりの 180° 回転で，E は E に，l は m にうつるから，P は R に，Q は S にうつる．よって対角線 PR，QS の中点は原点である．以上から，E に内接する平行四辺形の対角線の中点は原点である．平行四辺形が正方形になるための条件は，対角線の長さが等しく直交することであるから，点 $(u,\,v)$ が，E に内接する正方形の頂点であるための条件は

$(u,\,v)$ が E 上にあり，かつ $(u,\,v)$ を原点のまわりに 90° 回転した点 $(-v,\,u)$ も E 上にある

こと，すなわち

$$\frac{u^2}{4}+v^2=1\text{ かつ }\frac{v^2}{4}+u^2=1$$

である．これを解くと，$u^2=\dfrac{4}{5}$ かつ $v^2=\dfrac{4}{5}$，すなわち

$$(u,\, v)=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\ \ (\text{複号任意})$$

となる．以上から，求める 4 点の組は

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\ \ (\text{複号任意}) \qquad \cdots\ (\text{答})$$

である．

$\boxed{3}$

(1)

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = n\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}$$

$$(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = (n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}$$

であるから，

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

が成り立つ．（証明終）

右辺の$(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$は$n+1$の倍数だから左辺の$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n$も同じく$n+1$の倍数であるが，$n$と$n+1$は互いに素であるから，${}_{2n}\mathrm{C}_n$は$n+1$の倍数である．（証明終）

（前半別解）

与えられた等式の両辺を次のように解釈する．

左辺… $2n$人の中からn人選んで組を作り，そのn人の中からさらに代表を 1 人選ぶ選び方の総数

右辺… $2n$人の中から$n-1$人選んで組を作り，残る$n+1$人の中からこの組の代表を 1 人選んで合計n人の組にする選び方の総数

結果的にどちらも，$2n$人の中からn人の組とその中の代表 1 人を選ぶ方法の総数を表していることに変わりはない．よって両辺は等しい．（証明終）

(2) 正の整数nに対して，(1)より$a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$は整数である．そして，正の整数$n$に対して，

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{{}_{2n+2}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\\ &= \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!}\\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}a_n \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．これを用いて，nが 4 以上の整数ならば

$$a_n > n+2 \qquad \cdots(*)$$

であることを数学的帰納法により示す．

(I) $n=4$のとき

$$a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = 14 > 6 = 4+2$$

より，$n=4$ のとき(＊)は成り立つ．

(II)　k を 4 以上の整数とし，$n=k$ のとき(＊)が成り立つ，つまり

$$a_k > k+2 \quad \cdots②$$

が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}
a_{k+1}-\{(k+1)+2\} &= \frac{2(2k+1)}{k+2}a_k-(k+3)\\
&> \frac{2(2k+1)}{k+2}\times(k+2)-(k+3) \quad (\because ②より)\\
&= 4k+2-(k+3)\\
&= 3k-1 \geqq 3\cdot4-1>0
\end{aligned}$$

よって，$a_{k+1}>(k+1)+2$ が成り立つから，$n=k+1$ のときも(＊)が成り立つ．

したがって，n が 4 以上の整数ならば $a_n > n+2$ が成り立つ．　（証明終）

（別解）

$n \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}\\
&= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}\\
&= \frac{2n\cdot(2n-1)\cdot\ \cdots\ \cdot(n+3)}{n\cdot(n-1)\cdot\ \cdots\ \cdot1}\cdot(n+2)\\
&= \frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{2n-2}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n+3}{3}\cdot(n+2) \quad 【n\geqq4 ならば 2n-1\geqq n+3,\ n-1\geqq3 である】\\
&> 1\cdot1\cdot\ \cdots\ \cdot1\cdot(n+2)\\
&= n+2
\end{aligned}$$

したがって，n が 4 以上の整数ならば $a_n > n+2$ が成り立つ．　（証明終）

(3)　まず(2)より，すべての正の整数 n に対して a_n は整数である．$a_1=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{2}=1$，$a_2=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{3}=2$，$a_3=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{4}=5$，$a_4=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{5}=14$ であるから，a_2, a_3 は素数であり，a_1, a_4 は素数でない．

n が 4 以上の整数のとき，a_{n+1} が素数でないことを背理法で示す．$n\geqq4$ かつ a_{n+1} が素数であると仮定する．

$$a_{n+1}=\frac{{}_{2n+2}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2}=\frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}$$

であり，分子に含まれる最大の素因数を p とすると，$p\leqq 2n+1$ であるから，$a_{n+1}\leqq 2n+1$．

一方，①より

$$a_{n+1}=\frac{2(2n+1)}{n+2}a_n=\left(4-\frac{6}{n+2}\right)a_n \geqq \left(4-\frac{6}{4+2}\right)a_n=3a_n$$

(2)より，nが4以上の整数ならば$a_n>n+2$であるから，

$$a_{n+1}\geqq 3a_n>3(n+2)=3n+6>2n+1$$

これは$a_{n+1}\leqq 2n+1$に矛盾する．

したがって，nが4以上の整数のときa_{n+1}は素数ではない，つまりnが5以上の整数のときa_nは素数ではない．

以上より，a_nが素数となる正の整数nの値は

$n=2, 3$ …(答)

$\boxed{4}$

(1) $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{d}\right|=1$ より

$$\mathrm{AB}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\left|\vec{a}\right|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

であり, 同様にして

$$\mathrm{BC}^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c},\quad \mathrm{CA}^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{a},$$

$$\mathrm{AD}^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{d},\quad \mathrm{BD}^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{d},\quad \mathrm{CD}^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{d}$$

である. よって

$$\begin{aligned}F&=2\left\{\left(2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left(2-2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\left(2-2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\right\}\\&\qquad-3\left\{\left(2-2\vec{a}\cdot\vec{d}\right)+\left(2-2\vec{b}\cdot\vec{d}\right)+\left(2-2\vec{c}\cdot\vec{d}\right)\right\}\\&=-6-4\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)+6\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{d}\end{aligned}$$

である.

また

$$F'=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d}\right)$$

とおく. これらの $F,\ F'$ に対して

$$\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

とすると

$$F=-6-4(1+1+1)+6\cdot(-3)=-36$$

$$F'=k\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}=18k$$

であるから, S 上のすべての点 A, B, C, D に対して $F=F'$ となるには $k=-2$ でなければならない.

逆に, $k=-2$ のとき

$$\begin{aligned}F'&=-2\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d}\right)\\&=-2\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2+6\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{d}\\&=-2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)+6\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{d}\\&=-6-4\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)+6\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{d}\end{aligned}$$

であるから, S 上のすべての点 A, B, C, D に対して $F=F'$ となる.

以上より, F は F' の形に書け

$k=-2$ ……(答)

である. ■

(2) $\overrightarrow{g} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$ とおくと, $\left|\overrightarrow{d}\right| = 1$ より

$$F = -2\left\{3\overrightarrow{g}\cdot\left(3\overrightarrow{g} - 3\overrightarrow{d}\right)\right\} = -18\left(\left|\overrightarrow{g}\right|^2 - \overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{d}\right)$$
$$= -18\left|\overrightarrow{g} - \frac{1}{2}\overrightarrow{d}\right|^2 + \frac{9}{2}\left|\overrightarrow{d}\right|^2 = -18\left|\overrightarrow{g} - \frac{1}{2}\overrightarrow{d}\right|^2 + \frac{9}{2} \leqq \frac{9}{2}$$

である. 例えば

$$\overrightarrow{a} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\0\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\3\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{c} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-3\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とすると $\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right| = \left|\overrightarrow{d}\right| = 1$ かつ $\overrightarrow{g} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{d}$ が成り立つので, $F \leqq \dfrac{9}{2}$ の等号が成立する. よって

$$M = \frac{9}{2}$$ ……(答)

である.

(3) $F = M$ となるのは $\overrightarrow{g} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{d}$ すなわち

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{d}$$

のときである. これを変形すると

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{d} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$$

となる. $\overrightarrow{e} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{d} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}$ とおくと

$$\overrightarrow{e} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{15}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}7\\-\sqrt{15}\\0\end{pmatrix}$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{e}\right| = \frac{1}{8}\sqrt{49 + 15 + 0} = 1$$

である. よって, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{e}$ で点 E を定めると E も S 上の点である. ここで, A と B が S 上の異なる 2 点であると仮定すると

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} = \overrightarrow{e}$$

より, E は S の内部にあることになり矛盾である. よって, A と B は一致して, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = \overrightarrow{e}$ より

$$\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$$ ……(答)

である.

$\boxed{5}$

(1) $\mathrm{A}(0,\ a)$ とし，$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ と点 A との距離の 2 乗 AP^2 を $f(t)$ とする．

$$
\begin{aligned}
&C \text{ が } y \geqq x^2 \text{ で表される領域に含まれる}\\
\iff\ &\text{曲線 } y=x^2 \text{上のすべての点 P に対して } \mathrm{AP} \geqq a \text{ が成り立つ}\\
\iff\ &\text{曲線 } y=x^2 \text{上のすべての点 P に対して } \mathrm{AP}^2 \geqq a^2 \text{が成り立つ}\\
\iff\ &\text{すべての実数 } t \text{ に対して } f(t) \geqq a^2 \text{が成り立つ} \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}
$$

であるから，$(*)$ となるような a の範囲を求めればよい．

$$
\begin{aligned}
f(t)-a^2 &= \left\{(t-0)^2+(t^2-a)^2\right\}-a^2\\
&= t^4-(2a-1)t^2\\
&= t^2\left\{t^2-(2a-1)\right\}
\end{aligned}
$$

であるから

$$(*) \iff -(2a-1) \geqq 0$$

である．よって，求める a の範囲は

$$0<a \leqq \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $y=x^2-x^4$ 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2-t^4)$ と点 A との距離の 2 乗 AQ^2 を $g(t)$ とする．

$$
\begin{aligned}
&C \text{ が } y \geqq x^2-x^4 \text{ で表される領域に含まれる}\\
\iff\ &\text{曲線 } y=x^2-x^4 \text{上のすべての点 Q に対して } \mathrm{AQ} \geqq a \text{ が成り立つ}\\
\iff\ &\text{曲線 } y=x^2-x^4 \text{上のすべての点 Q に対して } \mathrm{AQ}^2 \geqq a^2 \text{が成り立つ}\\
\iff\ &\text{すべての実数 } t \text{ に対して } g(t) \geqq a^2 \text{が成り立つ} \qquad \cdots\cdots(**)
\end{aligned}
$$

であるから，$(**)$ となるような a の範囲を求めればよい．

$$
\begin{aligned}
g(t)-a^2 &= \left\{(t-0)^2+(t^2-t^4-a)^2\right\}-a^2\\
&= t^8-2t^6+(2a+1)t^4-(2a-1)t^2\\
&= t^2\underbrace{\left\{t^6-2t^4+(2a+1)t^2-(2a-1)\right\}}_{h(t)\text{ とおく}}
\end{aligned}
$$

であるから，これが常に 0 以上となるためには $t \fallingdotseq 0$ において常に $h(t) \geqq 0$ となることが必要で，そのためには

$$h(0) \geqq 0$$

すなわち

$$\left(0<\right) a \leqq \frac{1}{2}$$

となることが必要である．なぜなら，$h(0)<0$ であるとすると，0 に十分近い t に対して $h(t)<0$ となるからである．

逆に $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，(1) より円 C は $y \geqq x^2$ の表す領域に含まれるから，$y \geqq x^2 - x^4$ の表す領域にも含まれる．
なぜなら，すべての実数 x に対して

$$x^2 \geqq x^2 - x^4$$

が成り立つことにより，$y \geqq x^2$ で表される領域は $y \geqq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるからである．
以上より，求める a の範囲は

$$0 < a \leqq \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である．

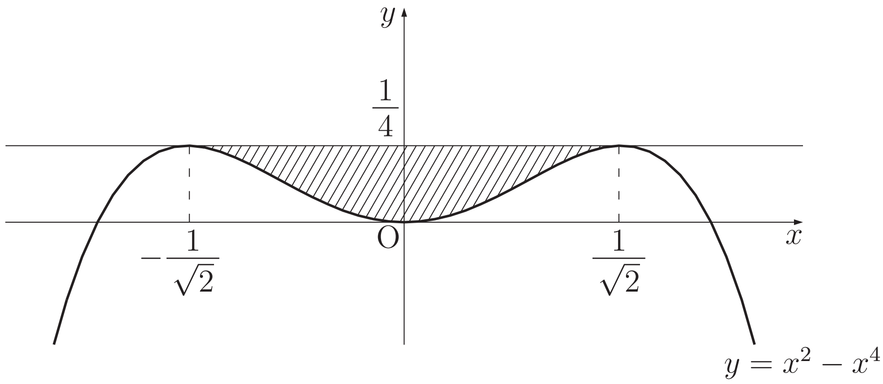
(3) まず，$y = x^2 - x^4$ のグラフの概形を調べる．
$y = x^2 - x^4$ は偶関数だからそのグラフは y 軸に関して対称である．

$$y' = 2x - 4x^3 = -4x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

であるから，$x \geqq 0$ における増減表は下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$

ゆえに，$y = x^2 - x^4$ のグラフの概形は下図のようになる．



上図斜線部を D とし，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とする．
まず V_1 を求める．
$y = x^2 - x^4 \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと

$$dy = (2x - 4x^3)\,dx$$

であるから

$$V_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi x^2\,(2x - 4x^3)\,dx$$
$$= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2x^3 - 4x^5)\,dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{\pi}{24}$$

である．

以下，求める体積を V とする．

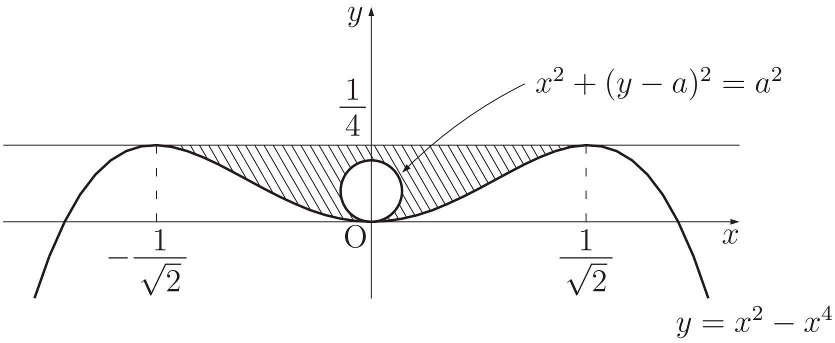
円 C が領域 D に含まれるのは

$$2a \leqq \frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad 0 < a \leqq \frac{1}{8}$$

のときである．a と $\frac{1}{8}$ の大小で場合分けする．

（i）$0 < a \leqq \frac{1}{8}$ のとき

V は，下図斜線部を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積である．



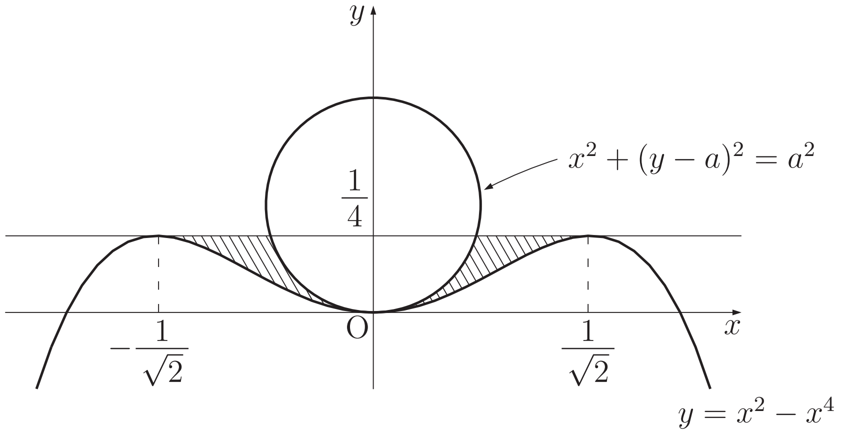
ゆえに

$$V = V_1 - \frac{4}{3}\pi a^3$$
$$= \frac{\pi}{24}(1 - 32a^3)$$

である．

(ii) $\dfrac{1}{8} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

V は，下図斜線部を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積である．



ゆえに

$$\begin{aligned} V &= V_1 - \int_0^{\frac{1}{4}} \pi\left\{a^2 - (y-a)^2\right\} dy \\ &= V_1 - \int_0^{\frac{1}{4}} \pi(2ay - y^2)\, dy \\ &= V_1 - \pi\left[ay^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= V_1 - \pi\left(\frac{1}{16}a - \frac{1}{192}\right) \\ &= \frac{\pi}{64}(3-4a) \end{aligned}$$

である．

以上より

$$V = \begin{cases} \dfrac{\pi}{24}(1-32a^3) & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{8} \text{ のとき}\right) \\ \dfrac{\pi}{64}(3-4a) & \left(\dfrac{1}{8} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

……(答)

である．