2021年度 早稲田大学 社会科学部 数学

1

[解答]

(1)　解と係数の関係より，

$$
\begin{aligned}
a &= -(\alpha+\beta)\\
&= -\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\\
&= -\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}\\
&= -\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}\\
&= -\frac{2}{\sin\theta} \qquad \cdots\cdots ①(答)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \alpha\beta\\
&= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\\
&= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}\\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1 \qquad \cdots\cdots ②(答)
\end{aligned}
$$

である．

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2+ax+b\\
&= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b
\end{aligned}
$$

であるから，頂点を (X, Y) とおくと，

$$X=-\frac{a}{2},\ Y=-\frac{a^2}{4}+b$$

であり，①，② を用いると，

$$X=\frac{1}{\sin\theta} \quad \cdots\cdots ③,\ Y=-\frac{1}{\sin^2\theta}+1 \quad \cdots\cdots ④$$

と表される．

よって，求める軌跡は，

「③ かつ ④ かつ $0<\theta<\pi$ を満たす θ が存在する」 ……Ⓐ

ような点 (X,Y) 全体の集合である．

③ より，

$$\sin\theta=\frac{1}{X} \qquad \cdots\cdots ③'$$

を得て，$0<\theta<\pi$ より $0<\sin\theta\leqq 1$ であることから，③′ を ④ とこれに代入し，

$$Ⓐ \iff Y=-X^2+1 \text{ かつ } 0<\frac{1}{X}<1$$

©駿台予備学校

$$\iff \quad Y=-X^2+1 \text{ かつ } X \geqq 1$$

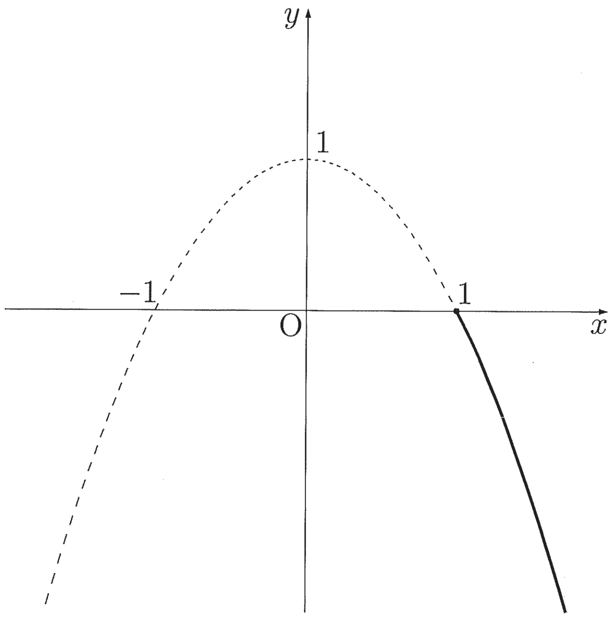
である．

以上より，求める軌跡は，

放物線 $y=-x^2+1$ の $x \geqq 1$ を満たす部分 ……(答)

である．

（注）グラフは下図のようになる．



(3) ①，② を用いると，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sin\theta}(x^2+ax+b)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^{2\sin\theta}\\ &=\frac{8}{3}\sin^3\theta+2a\sin^2\theta+2b\sin\theta\\ &=\frac{8}{3}\sin^3\theta+2\left(-\frac{2}{\sin\theta}\right)\sin^2\theta+2\cdot1\cdot\sin\theta\\ &=\frac{8}{3}\sin^3\theta-2\sin\theta\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sin\theta}f(x)dx=0 \quad &\iff \quad \sin\theta\,(4\sin^2\theta-3)=0\\ &\iff \quad \sin\theta=0 \text{ または } \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である．

よって，$0<\theta<\pi$ のもとでは，求める θ の値は，

$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$ ……(答)

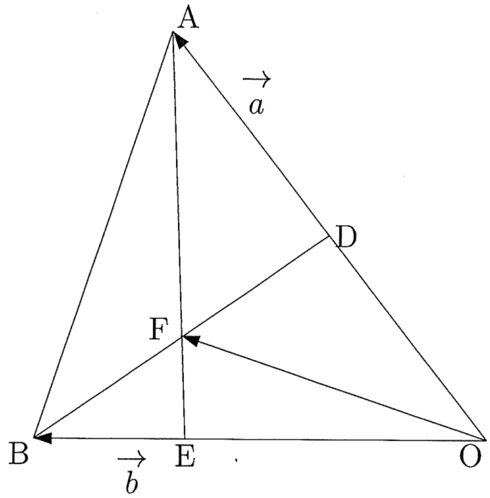
である．

©駿台予備学校

2

[解答]

(1)　まず“Fは線分AE上”より,



$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$=(1-s)\vec{a}+\frac{2s}{3}\vec{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

となる実数sが存在する.

次に,“Fは線分DB上”でもあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

となる実数tが存在する.

ここで,$\vec{a}$と$\vec{b}$は三角形の二辺をなすので,①と②より,

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{t}{2}\\ \dfrac{2s}{3}=1-t\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}s=\dfrac{3}{4}\\ t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

これらを①(または②)に代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

と表される.

(2)　(1)の結果を用いると,

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}} \iff \vec{a}\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$
$$\iff |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2$$
$$\iff a^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+2b^2$$

であるから,これを$\vec{a}\cdot\vec{b}$について解き,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-a^2+2b^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③(答)$$

と表される.

(3)　$\angle\mathrm{AOB}=\theta$とおくと,$b=1$のとき,③より,

$$a\cdot1\cdot\cos\theta=-a^2+2,\ すなわち,\ a\cos\theta=-a^2+2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

を得る.

よって,aのとり得る値の範囲は,③のもとで△OABが存在する条件から得られ,それは,

「③かつ$0<\theta<\pi$を満たすθが存在する」　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$Ⓐ

ような正の数aの条件として得られる.

ここで,$a>0$のもとでは,

$$\cos\theta=-a+\frac{2}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④'$$

であり,$0<\theta<\pi$より$-1<\cos\theta<1$であるから,④′を代入し,

$$Ⓐ \iff -1<-a+\frac{2}{a}<1$$

©駿台予備学校

$$\Leftrightarrow \quad -a < -a^2+2 < a \qquad (\because\ a>0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2-a-2<0 \\ a^2+a-2>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a+1)(a-2)<0 \\ (a+2)(a-1)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -1<a<2 \text{かつ} \text{“}a<-2 \text{または} a>1\text{”}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1<a<2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑤(答)$$

である．

(4)　$b=1$のとき，③を用い，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-(-a^2+2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-a^2+5a^2-4}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-\left(a^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

と表される．

⑤のもとで⑥の最大値を求めればよいから，

$$a^2=\frac{5}{2}\text{，すなわち，}\ a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\quad(\because\ ⑤) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

のときに，Sは最大値

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

をとる．

(注1)　(1)はメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}}=1 \qquad \therefore\ \frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{1}{2}=1$$

であるから，$\mathrm{DF}:\mathrm{FB}=1:1$でありこれより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{，つまり，}\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

と求めることもできる．

(注2)　$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}$より，$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=0$，つまり，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{OF}$である．この事実に基づいて(3)，(4)を初等幾何的に解決することもできる．

©駿台予備学校

3

[解答]

k 進法で $2021_{(k)}$ と表される整数 N は，k を用いると

$$N = 2k^3 + 2k + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される．

(1)　①と $k-1$ を k の整式とみて割り算することにより，

$$N = (k-1)(2k^2+2k+4)+5$$

が k によらず成り立ち，これを変形すると，

$$5 = N-(k-1)(2k^2+2k+4) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る．

よって，N が $k-1$ で割り切れるとき，②により，

「5 も $k-1$ で割り切れる」　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$③

から，③と k が 3 以上の整数であることにより，求める k の値は

$k-1=5$，つまり，$k=6$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)

である．

(2)　整数 N と整数 $k+1\,(\geqq 4)$ に対し，

$$N = (k+1)Q+R \quad かつ \quad 0 \leqq R < k+1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

となる整数 Q と R がただ一組存在する．このとき，求める余りは R である．

一方，①と $k+1$ を k の整式とみて割り算することにより，

$$N = (k+1)(2k^2-2k+4)-3$$

が k によらず成り立ち，これを変形すると，

$$N = (k+1)(2k^2-2k+3)+(k+1)-3$$

すなわち，

$$N = (k+1)(2k^2-2k+3)+k-2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

を得る．

$k \geqq 3$ のもとでは，$0 \leqq k-2 < k+1$ であるから，④と⑤により，求める余りは，

$k-2$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)

である．

(3)　N を $k+2\,(\geqq 5)$ で割ったときの余りが 1 となる条件は，

$$N = (k+2)M+1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

となる整数 M が存在することである．

一方，①と $k+2$ を k の整式とみて割り算することにより，

$$N = (k+2)(2k^2-4k+10)-19 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

が k によらず成り立つから，⑦を⑥に代入すると，

$$(k+2)(2k^2-4k+10)-19 = (k+2)M+1$$

すなわち，

$$(k+2)(2k^2-4k+10-M) = 20 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

を得る．

よって，⑥を満たす整数 M が存在する条件は，⑧を満たす整数 M が存在することで，それは⑧により，

「$k+2\,(\geqq 5)$ が 20 の約数となる」

ことであるから，求める k の値は，$k+2 \geqq 5$ に注意すると，

$k+2=5,10,20$，つまり，$k=3,8,18$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)

がすべてである．

©駿台予備学校

(注)　$k=3$のときは$M=12$が，$k=8$のときは$M=104$が，$k=18$のときは$M=261$が存在する．

©駿台予備学校