2022年度 神戸大学 前期 数学 理系

神戸大学　理系　1.

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,$

$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_n}$ ……①

(1) ①の両辺に $\sqrt{a_{n+1}}$ をかけると

$$a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}} = a_{n+1}\sqrt{a_n}$$

したがって，数列 $\{a_{n+1}\sqrt{a_n}\}$ は定数数列である。

$a_2\sqrt{a_1} = 2\sqrt{1} = 2$ より，

$$a_{n+1}\sqrt{a_n} = 2$$

よって，

$$a_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{a_n}}$$ (証明終わり)

(2) $a_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ の両辺正より，自然対数をとると

$$\log a_{n+1} = \log \frac{2}{\sqrt{a_n}}$$
$$= -\frac{1}{2}\log a_n + \log 2$$

$b_n = \log a_n$ より，

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \log 2$$

これは，

$$b_{n+1} - \frac{2}{3}\log 2 = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{2}{3}\log 2\right)$$

と変形できるから，数列 $\left\{b_n - \dfrac{2}{3}\log 2\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

よって，

$$b_n - \frac{2}{3}\log 2 = \left(b_1 - \frac{2}{3}\log 2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$b_1 = \log a_1 = \log 1 = 0$ より，求める b_n は

$$b_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2$$ ……(答)

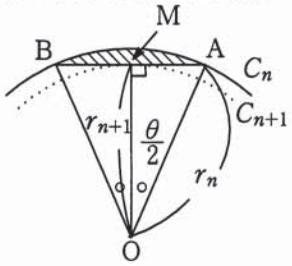
(3) $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3}\log 2 = \log 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$$ ……(答)

神戸大　理系2．

（1） 円の中心をO，正 m 角形 P_n の隣り合う2つの頂点をA，Bとし，ABの中点をMとする．



$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=r_n$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ は二等辺三角形となるので，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB}$ であり，円 C_{n+1} は点Mで辺AB に接する．よって，$\mathrm{OM}=r_{n+1}$

また，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2\pi}{m}=\theta$ より，$\angle\mathrm{AOM}=\angle\mathrm{BOM}=\dfrac{\theta}{2}$

よって，$\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}=\cos\dfrac{\theta}{2}$ より，$\dfrac{r_{n+1}}{r_n}=\cos\dfrac{\theta}{2}$

となるので，数列 $\{r_n\}$ は公比 $\cos\dfrac{\theta}{2}$ の等比数列となる．$r_1=1$ より，

$$r_n=1\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-1}=\cos^{n-1}\frac{\theta}{2}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

一方，s_n は，図の斜線部の弓形の面積 m 個分であり，

$$\begin{aligned}s_n&=m\cdot\{(\text{扇形 OAB})-\triangle\mathrm{OAB}\}\\&=\frac{2\pi}{\theta}\left(\frac{1}{2}{r_n}^2\theta-\frac{1}{2}{r_n}^2\sin\theta\right)\\&=\frac{2\pi}{\theta}\cdot\frac{1}{2}{r_n}^2(\theta-\sin\theta)\\&=\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{n-1}\\&=\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta}\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2}\ \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

（2） $f(m)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ は，初項 $s_1=\dfrac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta}$，公比 $\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ の無限等比級数であり，$m\geqq 3$ より $0<\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ なので

$$\frac{1}{2}\leqq\cos\frac{\theta}{2}<1\qquad\therefore\ \frac{1}{4}\leqq\cos^2\frac{\theta}{2}<1$$

これより，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ は収束して

$$f(m)=\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta}\cdot\frac{1}{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

（3） （2）より

$$f(m)=\pi\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\cdot\frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot 4=4\pi\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\cdot\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

であり，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}$ より，$m\to\infty$ のとき，$\theta\to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}=\frac{1}{6}$ を用いると

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = 4\pi \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^2 = \frac{2}{3}\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

神戸大学　理系 3.

(1)
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} - 2ax \\
&= \frac{-2x(ax^2-1+a)}{1+x^2} \\
&= \frac{-2x(\sqrt{a}\,x+\sqrt{1-a}\,)(\sqrt{a}\,x-\sqrt{1-a}\,)}{1+x^2} \quad (0<a<1 \text{ より})
\end{aligned}
$$

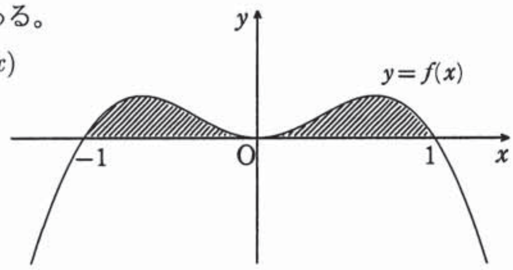
よって，$y=f(x)$ の増減は表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

極大値 $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right)=a-1-\log a$，極小値 $f(0)=0$　　　　$\cdots\cdots$(答)

(2)　$f(-x)=f(x)$ より曲線 $y=f(x)$ は y 軸に関して対称である。

また，$f(0)=f(1)=0$ であり，上の増減表より曲線 $y=f(x)$ は右図のようになる。



$f(1)=\log 2-a=0$　より　$a=\log 2$

求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^1 f(x)dx \\
\frac{S}{2} &= \int_0^1 \{\log(1+x^2)-x^2\log 2\}dx \\
&= \Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx - \left[\frac{\log 2}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \log 2 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx - \frac{\log 2}{3} \\
&= \frac{2}{3}\log 2 - 2\Big[\,x\,\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{2}{3}\log 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ については，$x=\tan\theta$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \frac{2}{3}\log 2 - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{2}{3}\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \\
S &= \frac{4}{3}\log 2 + \pi - 4 \qquad \cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

4.

(1)

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ ……① , $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ ……② とする。

① に ② を代入して,

$$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{a}x+\sqrt{a}\right)^2=1$$
$$x^2-\left(ax^2+2ax+a\right)=4$$
$$\therefore\ (1-a)x^2-2ax-a-4=0\ \cdots\cdots③$$

①と② が異なる 2 点で交わるとき, x の方程式 ③ が異なる 2 つの実数解をもつ。

(i) $a=1$ のとき,

③ から,

$$-2x-5=0\quad\therefore\ x=-\frac{5}{2}$$

となり, ③ の実数解が 1 つなので, 条件をみたさない。

(ii) $0<a<1,\ 1<a$ のとき,

x の 2 次方程式 ③ の判別式を D とおくと,

$$\frac{D}{4}=a^2-(1-a)(-a-4)=-3a+4$$

であり, ③ が異なる 2 つの実数解をもつとき, $D>0$ より,

$$-3a+4>0\quad\therefore\ a<\frac{4}{3}$$

$0<a<1,\ 1<a$ より,

$$0<a<1,\ 1<a<\frac{4}{3}$$

(i), (ii) より, a のとりうる値の範囲は,

$$0<a<1,\ 1<a<\frac{4}{3}\ \cdots\cdots(答)$$

(2)

2 点 P, Q の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とおくと,

$\alpha,\ \beta$ は x の 2 次方程式 ③ の異なる 2 つの実数解であり,

解と係数の関係により,

$$\alpha+\beta=\frac{2a}{1-a}$$

R は線分 PQ の中点より, $s=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であるから,

$$s=\frac{a}{1-a}\ \cdots\cdots④\ \cdots\cdots(答)$$

R は ② 上にあるから,

$$t=\sqrt{a}s+\sqrt{a}=\sqrt{a}(s+1)$$

④ を代入して,

$$t=\frac{\sqrt{a}}{1-a}\ \cdots\cdots⑤\ \cdots\cdots(答)$$

(3)

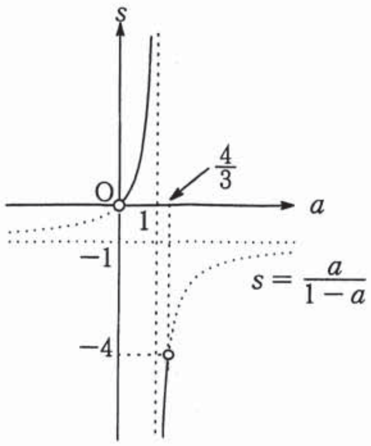
④から,

$$s=-1-\frac{1}{a-1}$$

(1)より, $0<a<1,\ 1<a<\frac{4}{3}$ であるから,

s のとりうる値の範囲は, 右図より,

$$s<-4,\ 0<s\ \cdots\cdots(\text{答})$$



(4)

$a\neq 0$ であるから, ⑤より, $t\neq 0$ であり,

④, ⑤より,

$$\frac{s}{t}=\sqrt{a}\ \cdots\cdots ⑥$$

⑤から,

$$(1-a)t=\sqrt{a}$$

⑥を代入して,

$$\left(1-\frac{s^2}{t^2}\right)t=\frac{s}{t}$$

$$t^2-s^2=s$$

$$\therefore\ t^2=s^2+s$$

$\sqrt{a}>0$ と⑥より, $\dfrac{s}{t}>0$ であり, s と t の正負が一致するから, (3)に注意して,

$$t=\begin{cases}-\sqrt{s^2+s} & (s<-4\text{ のとき})\\ \sqrt{s^2+s} & (s>0\text{ のとき})\end{cases}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(1) $$a^x=b^y=(ab)^z \quad \cdots\cdots①$$

$1<a<b$ より，$ab>1$ であるから，①の各辺の底を ab とする対数をとると

$$x\log_{ab}a=y\log_{ab}b=z \quad \cdots\cdots②$$

②より

$$\frac{1}{x}=\frac{\log_{ab}a}{z},\quad \frac{1}{y}=\frac{\log_{ab}b}{z}$$

であるから

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\log_{ab}a+\log_{ab}b}{z}=\frac{\log_{ab}ab}{z}=\frac{1}{z}$$

（証明終わり）

(2) $$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p} \quad \cdots\cdots③$$

③の両辺に pmn をかけて

$$pn+pm=mn$$

$$mn-pm-pn=0$$

$$\therefore\ (m-p)(n-p)=p^2 \quad \cdots\cdots④$$

また，$m>0$，$n>0$，$p>0$ であるから，③より

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}=\frac{n-p}{pn}>0 \qquad \therefore\quad n>p$$

$m>n$ とあわせて

$m-p$，$n-p$ は $m-p>n-p>0$ を満たす整数 $\cdots\cdots⑤$

p は素数であるから，④，⑤より

$$\begin{cases} m-p=p^2 \\ n-p=1 \end{cases}$$

よって

$m=p^2+p$，$n=p+1$ $\cdots\cdots$**(答)**

(3) $$a^m=b^n=(ab)^p \quad \cdots\cdots⑥$$

より

$$\begin{cases} a^m=b^n & \cdots\cdots⑦ \\ b^n=(ab)^p & \cdots\cdots⑧ \end{cases}$$

$1<a<b$ より　　$a^n<b^n$

これと⑦より　　$a^n<a^m$

$a>1$ より　　$m>n$ $\cdots\cdots⑨$

⑥と(1)で示したことにより

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}$$

が成り立ち，⑨により(2)の結果から

$$(m,\ n)=(p^2+p,\ p+1)$$

である．さらに⑦と $a>0$，$b>0$ より

$$b=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{p^2+p}{p+1}}=a^p$$

このとき

$$b^n=(a^p)^{p+1}=a^{p^2+p},\quad (ab)^p=(a\cdot a^p)^p=(a^{p+1})^p=a^{p^2+p}$$

となり，⑧も成り立つ.

以上より

$$b=a^p \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$