2022年度 神戸大学 前期 数学 文系

文 1.

(1) $x \geqq 0$ における C と ℓ の共有点の個数 N_1 について

C と ℓ の方程式から y を消去すると，

$$x^2 = 2ax - 1 \quad \therefore \quad x^2 - 2ax + 1 = 0$$

この左辺を $g(x)$ とおくと，N_1 は

「x の 2 次方程式 $g(x) = 0$ の $x \geqq 0$ における異なる実数解の個数」

に等しい．ここで，

$g(0) = 1 > 0$
軸：$x = a > 0$
判別式 $D = 4(a^2 - 1) = 4(a+1)(a-1)$

よって，

$$\begin{cases} N_1 = 0 \iff D < 0 \iff 0 < a < 1 \\ N_1 = 1 \iff D = 0 \iff a = 1 \\ N_1 = 2 \iff D > 0 \iff a > 1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

$x < 0$ における C と ℓ の共有点の個数 N_2 について

C と ℓ の方程式から y を消去すると，

$$-x^2 = 2ax - 1 \quad \therefore \quad x^2 + 2ax - 1 = 0$$

この左辺を $h(x)$ とおくと，N_2 は

「x の 2 次方程式 $h(x) = 0$ の $x < 0$ における異なる実数解の個数」

に等しい．ここで，

$$h(0) = -1 < 0$$

よって，$h(x) = 0$ は異符号の解をもつから，

任意の正の実数 a に対して，$N_2 = 1$ $\qquad \cdots\cdots ②$

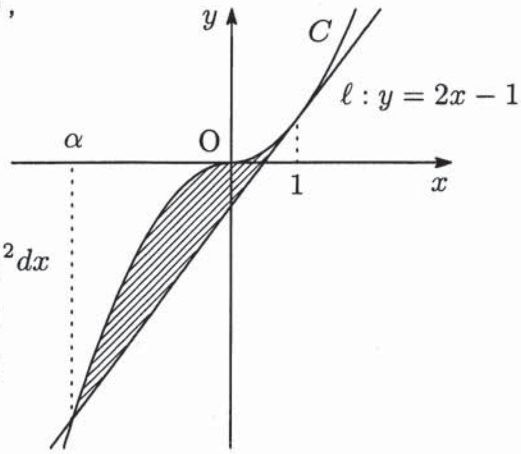
①，②より，求める個数 $N_1 + N_2$ は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 & \text{のとき} \quad 1\text{個} \\ a = 1 & \text{のとき} \quad 2\text{個} \\ a > 1 & \text{のとき} \quad 3\text{個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots (答)$$

(2) (1) の結果より，$a = 1$ であり，

$$g(x) = (x-1)^2,\ h(x) = x^2 + 2x - 1$$

$h(x)=0\ (x<0)$ の解 $x=-1-\sqrt{2}$ を α とおくと，C と ℓ で囲まれた図形は下図の斜線部のようになる．よって，求める面積 S はグラフより，



$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^1 \{f(x)-(2x-1)\}dx \\
&= -\int_\alpha^0 h(x)dx + \int_0^1 g(x)dx \\
&= \int_0^\alpha \{(x+1)^2-2\}dx + \int_0^1 (x-1)^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3-2x\right]_0^\alpha + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}(\alpha+1)^3-2\alpha-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\{(-\sqrt{2})^3-6(-1-\sqrt{2})\} = \frac{6+4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

したがって，求める面積は

$$\frac{6+4\sqrt{2}}{3}$$

……（答）

（注）　(1) では，座標平面上に C と ℓ（傾き $2a>0$，y 切片 -1 の直線）をかくことで，

$$N_2 = 1$$

であることがわかる．さらに，C の $x \geqq 0$ の部分と ℓ が接するとき，

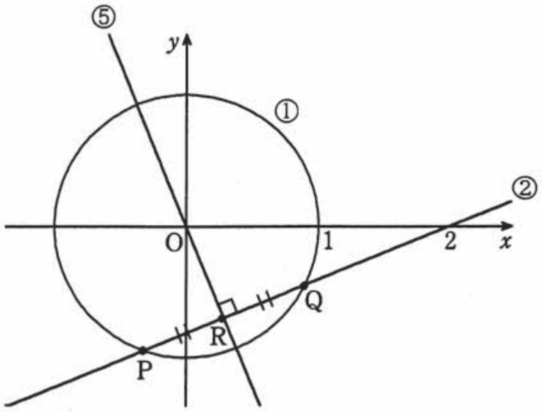
$$D=0 \iff a=1$$

であることに着目すると，

$$
N_1 = \begin{cases} 0 & (0<a<1 \quad のとき) \\ 1 & (a=1 \quad のとき) \\ 2 & (a>1 \quad のとき) \end{cases}
$$

であることもわかる．

文系　2.



$$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$y=\sqrt{a}\,x-2\sqrt{a} \quad \cdots\cdots ②$$

とする.

(1)　①と②が異なる2点P，Qで交わっているので

（①の中心(0，0)と②の距離）<（①の半径）

②は $\sqrt{a}\,x-y-2\sqrt{a}=0$ であるから

$$\frac{|\sqrt{a}\cdot 0-0-2\sqrt{a}|}{\sqrt{(\sqrt{a})^2+(-1)^2}}<1$$

$\therefore\ 2\sqrt{a}<\sqrt{a+1}$

両辺正なので，2乗すると

$$4a<a+1$$

さらに，$a>0$ より

$$0<a<\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

……(答)

(1) 別解

②を①に代入すると

$$x^2+a(x-2)^2=1$$

$\therefore\ (a+1)x^2-4ax+4a-1=0 \quad \cdots\cdots ④$

①と②が異なる2点P，Qで交わっているので

（④の判別式）>0

$$4a^2-(a+1)(4a-1)>0$$

$\therefore\ -3a+1>0$

さらに，$a>0$ より

$$0<a<\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

……(答)

(2)　$\sqrt{a}\fallingdotseq 0$ であるから，①の中心(0，0)を通り，②に垂直な直線は

$$y=-\frac{1}{\sqrt{a}}x \quad \cdots\cdots ⑤$$

Rは②と⑤の交点なので，2式を連立して解くことにより

$$s=\frac{2a}{a+1} \quad \cdots\cdots ⑥$$

……(答)

$$t=-\frac{2\sqrt{a}}{a+1} \quad \cdots\cdots ⑦$$

……(答)

(2) 別解

④の2解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{4a}{a+1}$$

$$\therefore\ s=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2a}{a+1} \quad \cdots\cdots ⑥$$

……(答)

さらに，Rは②上なので

$$t=\sqrt{a}(s-2)=\sqrt{a}\left(\frac{2a}{a+1}-2\right)=-\frac{2\sqrt{a}}{a+1} \quad \cdots\cdots ⑦$$

……(答)

(3) ⑥より

$$(a+1)s=2a$$

$$\therefore\ (s-2)a=-s$$

$s=2$ とすると，$0=-2$ となり不適．よって，$s\neq 2$ なので

$$a=-\frac{s}{s-2}\quad\cdots\cdots⑧$$

⑧を③に代入すると

$$0<-\frac{s}{s-2}<\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases}0<-3s<s-2 & (s-2>0\text{ のとき})\\ 0>-3s>s-2 & (s-2<0\text{ のとき})\end{cases}$$

$$\begin{cases}s<0\text{ かつ }s>\dfrac{1}{2} & (s>2\text{ のとき})\\ 0<s<\dfrac{1}{2} & (s<2\text{ のとき})\end{cases}$$

$$\therefore\ 0<s<\frac{1}{2}$$ ……(答)

(4) ⑧を⑦に代入すると

$$t=-\frac{2\sqrt{\dfrac{s}{2-s}}}{\dfrac{s}{2-s}+1}=-\frac{2\sqrt{s(2-s)}}{s+(2-s)}=-\sqrt{s(2-s)}$$ ……(答)

(4) 別解

R は⑤上なので　$t=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}s$

よって，⑧を代入すると

$$t=-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{s}{2-s}}}s=-\sqrt{s(2-s)}$$ ……(答)

3．

(1) $$a^x=b^y=(ab)^z \quad \cdots\cdots①$$

$1<a<b$ より，$ab>1$ であるから，①の各辺の底を ab とする対数をとると

$$x\log_{ab}a=y\log_{ab}b=z \quad \cdots\cdots②$$

②より

$$\frac{1}{x}=\frac{\log_{ab}a}{z},\quad \frac{1}{y}=\frac{\log_{ab}b}{z}$$

であるから

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\log_{ab}a+\log_{ab}b}{z}=\frac{\log_{ab}ab}{z}=\frac{1}{z}$$ **（証明終わり）**

(2) $$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{5} \quad \cdots\cdots③$$

③の両辺に $5mn$ をかけて

$$5n+5m=mn$$

$$mn-5m-5n=0$$

$$\therefore\ (m-5)(n-5)=25 \quad \cdots\cdots④$$

また，$m>0$，$n>0$，$p>0$ であるから，③より

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{5}-\frac{1}{n}=\frac{n-5}{5n}>0 \qquad \therefore\quad n>5$$

$m>n$ とあわせて

$m-5$，$n-5$ は $m-5>n-5>0$ を満たす整数 $\cdots\cdots⑤$

④，⑤より

$$\begin{cases} m-5=25 \\ n-5=1 \end{cases}$$

よって

$m=30$，$n=6$ ……**(答)**

(3) $$a^m=b^n=(ab)^5 \quad \cdots\cdots⑥$$

より

$$\begin{cases} a^m=b^n & \cdots\cdots⑦ \\ b^n=(ab)^5 & \cdots\cdots⑧ \end{cases}$$

$1<a<b$ より $\qquad a^n<b^n$

これと⑦より $\qquad a^n<a^m$

$a>1$ より $\qquad m>n \quad \cdots\cdots⑨$

⑥と(1)で示したことにより

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$$

が成り立ち，⑨により(2)の結果から

$$(m,\ n)=(30,\ 6)$$

である．さらに⑦と $a>0$，$b>0$ より

$$a^{30}=b^6 \qquad \therefore\quad b=a^5$$

このとき

$$b^6=(a^5)^6=a^{30}\,,\quad (ab)^5=(a\cdot a^5)^5=(a^6)^5=a^{30}$$

となり，⑧も成り立つ．

以上より

$$b=a^5 \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$