2024年度 大阪大学 前期 数学 理系

$\boxed{1}$

(1) $f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3}$

$$f_n{}'(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$$

$n \geqq 1$，$x \geqq 0$ より，$e^{nx} \geqq 1$ であり，
$-1 \leqq \sin\frac{x}{3} \leqq 1$ より

$$f_n{}'(x) \leqq -\frac{n}{2} + \frac{1}{3} \leqq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

よって，$f_n{}'(x) < 0$ であるから，$f_n(x)$ は減少する．

$$f_n(0) = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > 0$$

$\cos\frac{x}{3} \leqq 1$ であるから，$f_n(x) \leqq 2 - \frac{1}{2}e^{nx}$
$\lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2}e^{nx}\right) = -\infty$ より，$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = -\infty$
以上より，方程式 $f_n(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ．(証明終わり)

(2) $f_n(a_n) = 0$ より

$$1 - \frac{1}{2}e^{na_n} + \cos\frac{a_n}{3} = 0$$
$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\cos\frac{a_n}{3} \leqq 1$ であるから

$$e^{na_n} \leqq 4$$
$$\therefore na_n \leqq \log 4$$

$n > 0$ より，$a_n \leqq \frac{\log 4}{n}$
(1) より，$a_n > 0$ であるから

$$0 < a_n \leqq \frac{\log 4}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\log 4}{n} = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) ①より

$$na_n = \log\left\{2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right)\right\}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} na_n = \log 2(1+1) = \log 4 \qquad \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{2}$

（1） $|f(1)-3| \leqq 1$ かつ $|f(i)-1| \leqq 3$

$|\alpha+\beta-2| \leqq 1$ かつ $|i\alpha+\beta-2| \leqq 3$ ……①

$\gamma=f(1+i)$ とおくと

$\gamma=(1+i)\alpha+\beta+2i \qquad \therefore \beta=\gamma-(1+i)\alpha-2i$ ……②

これを ① に代入すると

$|\alpha+\gamma-(1+i)\alpha-2i-2| \leqq 1$

かつ $|i\alpha+\gamma-(1+i)\alpha-2i-2| \leqq 3$

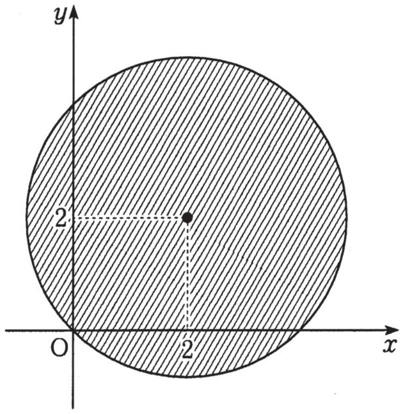
$|-i\alpha+\gamma-2-2i| \leqq 1$

かつ $|-\alpha+\gamma-2-2i| \leqq 3$

$\therefore |\alpha+i\gamma+2-2i| \leqq 1$

かつ $|\alpha-\gamma+2+2i| \leqq 3$

……③



A(α), B($-i\gamma-2+2i$), C($\gamma-2-2i$)

とすると

AB $\leqq 1$, AC $\leqq 3$

これを満たす α の存在条件を考えて

BC $\leqq 4$

$|(-i\gamma-2+2i)-(\gamma-2-2i)| \leqq 4$

$|-(1+i)\gamma+4i| \leqq 4$

$|-(1+i)||\gamma-2(1+i)| \leqq 4$

$\therefore |\gamma-2(1+i)| \leqq 2\sqrt{2}$

よって，γ がとりうる値の範囲は右図の斜線部（境界を含む）になる．

（2） $\gamma=0$ のとき，③ より

$|\alpha-(-2+2i)| \leqq 1$

かつ $|\alpha-(-2-2i)| \leqq 3$

$\therefore \alpha=-2+i$

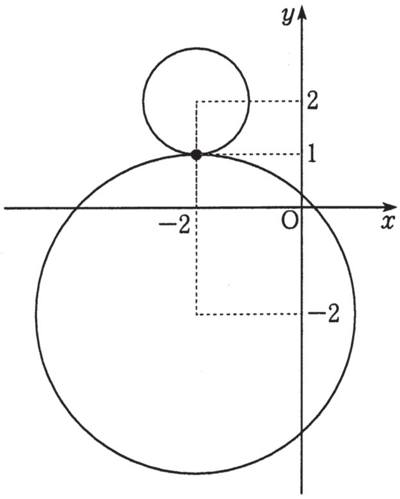
このとき，② より

$\beta=-(1+i)(-2+i)-2i$

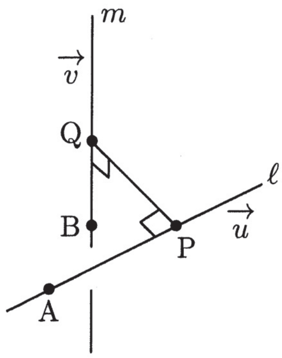
$=3-i$

以上のことから

$\boldsymbol{\alpha=-2+i,\ \beta=3-i}$ ……(答)



$\boxed{3}$ 直線 ℓ 上に点A，直線 m 上に点Bをとる．また，ℓ，m の方向ベクトルの1つをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とする（$\vec{u} \neq \vec{0}$，$\vec{v} \neq \vec{0}$）．



ℓ，m はねじれの位置にあるから，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行でない．よって，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ とおくと，$0 < \theta < \pi$ であり，

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \neq \pm 1 \quad \therefore \quad (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \neq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ．

また，点Pを ℓ 上，点Qを m 上にとると，ℓ，m はねじれの位置にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq \vec{0}$ である．よって，ℓ と m の両方に直交する直線は

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{v}$ を満たす2点P，Qを通る直線

として得られ，

「$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{u} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{v} = 0$ …… Ⓐ を満たす2点P，Qがただ1組存在すること」

を示す．実数 s，t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{u}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = t\vec{v}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - s\vec{u} + t\vec{v}$$

と表せる．これをⒶに代入すると，

$$\begin{cases} (\overrightarrow{\mathrm{AB}} - s\vec{u} + t\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \\ (\overrightarrow{\mathrm{AB}} - s\vec{u} + t\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} |\vec{u}|^2 s - (\vec{u} \cdot \vec{v})t = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{u} \\ (\vec{u} \cdot \vec{v})s - |\vec{v}|^2 t = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

である．

ここで，$a = |\vec{u}|^2$，$b = \vec{u} \cdot \vec{v}$，$c = |\vec{v}|^2$，$d = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{u}$，$e = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{v}$ とおくと，

$$\begin{cases} as - bt = d \\ bs - ct = e \end{cases}$$

と表せ，$(*)$ より，$ac - b^2 \neq 0$ であることから，s，t について解くと，

$$s = \frac{cd - be}{ac - b^2}, \quad t = \frac{bd - ae}{ac - b^2}$$

であり，s，t はただ1組存在する．

したがって，ℓ と m の両方に直交する直線がただ1つ存在する．（証明終わり）

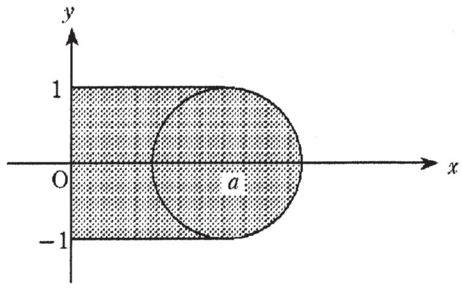
理系 $\boxed{4}$

(1) 円Cの方程式は

$$(x-a)^2+y^2=1$$

$$\therefore\ x=\begin{cases}a+\sqrt{1-y^2} & (x\geqq a\text{ のとき})\\ a-\sqrt{1-y^2} & (x\leqq a\text{ のとき})\end{cases}$$

である．



よって，右図の網目部分を y 軸のまわりに1回転させて，

$$\begin{aligned}V_1&=\int_{-1}^{1}\pi(a+\sqrt{1-y^2})^2dy\\&=2\pi\int_0^1(a^2+2a\sqrt{1-y^2}+1-y^2)\,dy\quad(\because\text{ 偶関数の積分})\\&=2\pi\left[\,(a^2+1)y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1+4\pi a\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy\\&=2\pi\left(a^2+\frac{2}{3}\right)+4\pi a\cdot\frac{\pi}{4}\\&=\boldsymbol{\pi\left(2a^2+\pi a+\frac{4}{3}\right)}\end{aligned}$$

$\cdots$ **(答)**

(注) $\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ は半径1の四分円の面積である．

(2) 右図の網目部分を y 軸のまわりに 1 回転させて，

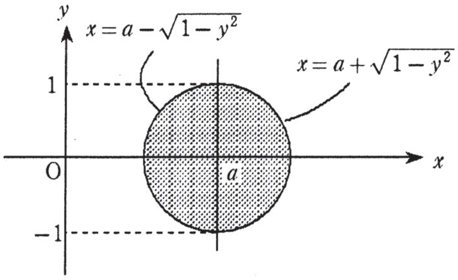
$$V_2=\int_{-1}^{1}\left\{\pi(a+\sqrt{1-y^2})^2-\pi(a-\sqrt{1-y^2})^2\right\}dy$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}4a\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=8\pi a\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\quad(\because\ \text{偶関数の積分})$$

$$=8\pi a\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=2\pi^2 a$$



$V_1=2V_2$ より，

$$\pi\left(2a^2+\pi a+\frac{4}{3}\right)=2\cdot 2\pi^2 a\quad\therefore\ 2a^2-3\pi a+\frac{4}{3}=0$$

ここで，$f(a)=2a^2-3\pi a+\dfrac{4}{3}$ とおくと，

$$f(1)=\frac{10}{3}-3\pi<\frac{10}{3}-3\cdot 3<0$$

より，2 次方程式 $f(a)=0$ は 1 より大きい解と小さい解を 1 つずつもつ．
よって $a>1$ より，

$$\boldsymbol{a=\frac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}}\qquad\cdots(\text{答})$$

$\boxed{5}$

（1） $N=p^aq^br^c$ とする．1 から N までの整数からなる集合を全体集合 U として， 集合 A, B, C をそれぞれ p, q, r の倍数の集合とする．集合 X の要素の個数を $|X|$ と表すと

$$|A|=\frac{N}{p}=p^{a-1}q^br^c$$

同様にして

$$|B|=p^aq^{b-1}r^c,\quad |C|=p^aq^br^{c-1},$$
$$|A\cap B|=p^{a-1}q^{b-1}r^c,\quad |B\cap C|=p^aq^{b-1}r^{c-1},$$
$$|C\cap A|=p^{a-1}q^br^{c-1},\quad |A\cap B\cap C|=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}$$

よって,

$$\begin{aligned}
&f(n)\\
&=|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|\\
&=|U|-|A\cup B\cup C|\\
&=|U|-\{|A|+|B|+|C|\\
&\qquad -|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|\}\\
&=p^aq^br^c-(p^{a-1}q^br^c+p^aq^{b-1}r^c+p^aq^br^{c-1}\\
&\qquad -p^{a-1}q^{b-1}r^c-p^aq^{b-1}r^{c-1}-p^{a-1}q^br^{c-1}+p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1})\\
&=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(pqr-qr-pr-pq+r+p+q-1)\\
&=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)
\end{aligned}$$

（証明終わり）

（2） $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$ だから， 5 から 100 までの自然数には素因数を 4 種以上もつものは存在しない．

（i）n が素因数を 1 種のみもつとき

$n=p^a$（p は素数，a は自然数）と表すと，（1）と同様に

$f(n)=p^{a-1}(p-1)$ である．$f(n)$ が n の約数であるための条件は

$$\frac{n}{f(n)}=\frac{p}{p-1}\text{ が整数}$$

である． $p-1$ は（p より小さい）p の約数であるから $p-1=1$ である．

よって $p=2$ となって， $n=2^a$ と表されるもののうち， $5\leqq n\leqq 100$ を満たすものは

$$n=2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6 \qquad \therefore\quad n=8,\ 16,\ 32,\ 64$$

(ii) n が素因数を 2 種のみもつとき

$n = p^a q^b$ (p, q は素数，$p < q$，a, b は自然数) と表すと，(1)と同様に $f(n) = p^{a-1}q^{b-1}(p-1)(q-1)$ である．$f(n)$ が n の約数であるための条件は

$$\frac{n}{f(n)} = \frac{pq}{(p-1)(q-1)} \text{ が整数} \quad \cdots\cdots①$$

である．$p-1$ は (p より小さい) p の約数なので $p-1=1$. よって

$$① \iff \frac{2q}{q-1} \text{ が整数}$$

$q-1$ は (q より小さく 1 より大きい) $2q$ の約数なので $q-1=2$ である．したがって $p=2, q=3$ であり， $n = 2^a 3^b$ と表されるもののうち，$5 \leqq n \leqq 100$ を満たすものは

$$n = 2\cdot3,\ 2\cdot3^2,\ 2\cdot3^3,\ 2^2\cdot3,\ 2^2\cdot3^2,\ 2^3\cdot3,\ 2^3\cdot3^2,\ 2^4\cdot3,\ 2^5\cdot3$$

$$\therefore\ n = 6, 18, 54, 12, 36, 24, 72, 48, 96$$

(iii) n が素因数を 3 種のみもつとき

$n = p^a q^b r^c$ (p, q, r は素数，$p < q < r$，a, b, c は自然数) と表すと，(1)の結果から $f(n) = p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)$ であり，$f(n)$ が n の約数であるための条件は

$$\frac{n}{f(n)} = \frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)} \text{ が整数} \quad \cdots\cdots②$$

である．(ii)と同様に $p-1=1$. よって

$$② \iff \frac{2qr}{(q-1)(r-1)} \text{ が整数} \quad \cdots\cdots③$$

再び (ii)と同様に， $q-1=2$ であり

$$③ \iff \frac{3r}{r-1} \text{ が整数}$$

再び (ii)と同様に $r-1=3$ となるが，r が素数でなく不適当.

以上 (i)，(ii)，(iii)をまとめると， 求める n は

$n = \mathbf{6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96}$……(答)