2024年度 大阪大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$

$$C : y = \left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1 & (x \leqq -1,\ 1 \leqq x) & \cdots ① \\ -x^2+1 & (-1 \leqq x \leqq 1) & \cdots ② \end{cases}$$

（１）①と $\ell : y = 2a(x+1)$ より，

$$x^2-1 = 2a(x+1)$$
$$(x-1)(x+1) = 2a(x+1)$$
$$(x+1)(x-1-2a) = 0 \qquad \therefore \quad x = -1,\ 2a+1$$

$0 < a < 1$ を考えると，これらはともに $x \leqq -1$，$1 \leqq x$ を満たす．

次に，②と ℓ より，

$$-x^2+1 = 2a(x+1)$$
$$-(x-1)(x+1) = 2a(x+1)$$
$$(x+1)(x-1+2a) = 0 \qquad \therefore \quad x = -1,\ -2a+1$$

$0 < a < 1$ を考えると，これらはともに $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす．

よって，C と ℓ の共有点の座標は，

$$(-1,\ 0),\ (2a+1,\ 4a^2+4a),\ (-2a+1,\ -4a^2+4a) \quad \cdots (答)$$

（２）$0 < a < 1$ より，

$$-1 < -2a+1 < 2a+1$$

であり，

S_1 ： $y = -x^2+1$ と ℓ で囲まれる部分の面積

S_2 ： $y = x^2-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積

S_3 ： $y = -x^2+1$ と x 軸で囲まれる部分の面積

S_4 ： $y = x^2-1$ と ℓ で囲まれる部分の面積

とすると，

$-1 \leqq x \leqq -2a+1$ において C と ℓ で囲まれる部分の面積は S_1，

$-2a+1 \leqq x \leqq 2a+1$ において C と ℓ で囲まれる部分の面積は $S_4 - S_2 - (S_3 - S_1)$

であるから，これらが等しいとき，$S_2 = S_3$ を考えて，

$$S_1 = S_4 - S_2 - (S_3 - S_1) \qquad \therefore \quad S_4 = 2S_2 \quad \cdots ③$$

ここで，

$$S_4 = \int_{-1}^{2a+1} \left\{2a(x+1) - (x^2-1)\right\} dx = \int_{-1}^{2a+1} \left\{-(x+1)(x-2a-1)\right\} dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{(2a+1)-(-1)\right\}^3 = \frac{4}{3}(a+1)^3$$

$$S_2 = \int_{-1}^{1} \left\{-(x^2-1)\right\} dx = \int_{-1}^{1} \left\{-(x+1)(x-1)\right\} dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{(1-(-1)\right\}^3 = \frac{4}{3}$$

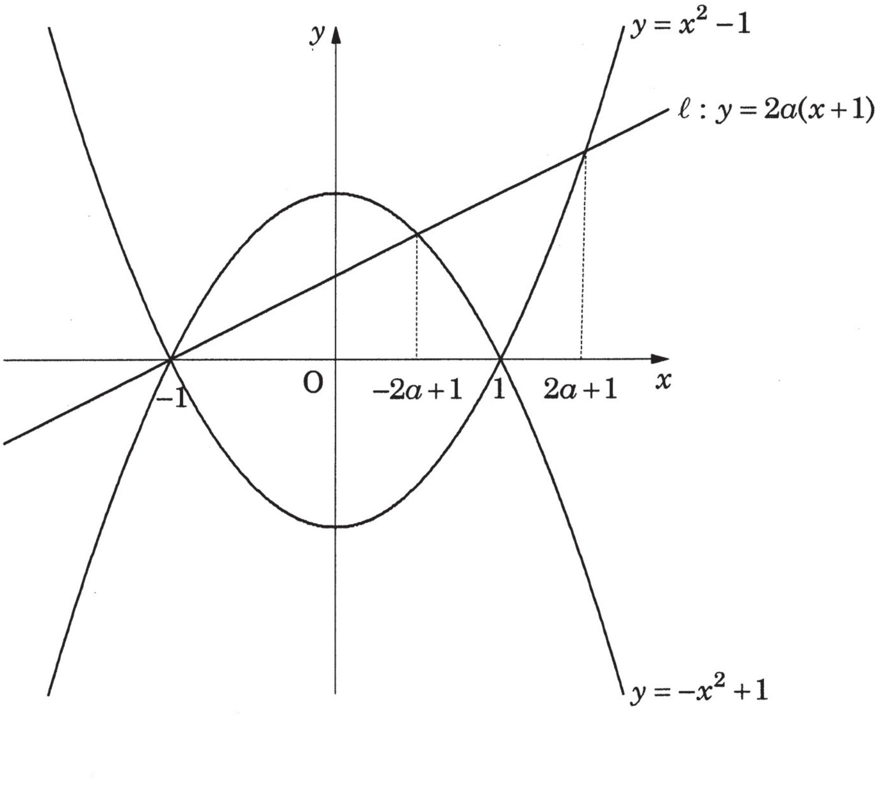
であるから，③より，

$$\frac{4}{3}(a+1)^3 = 2 \cdot \frac{4}{3} \qquad \therefore \quad (a+1)^3 = 2$$

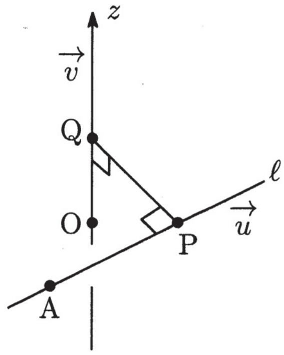
$a+1$ は実数であるから，

$$a+1 = \sqrt[3]{2} \qquad \therefore \quad a = \sqrt[3]{2} - 1 \quad \cdots（答）$$

これは $0 < a < 1$ を満たす.



$\boxed{2}$ 原点をOとし，直線ℓ上に点Aをとる．また，ℓ，z軸の方向ベクトルの1つをそれぞれ$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$とする（$\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$）．



ℓとz軸はねじれの位置にあるから，$\overrightarrow{u}$と$\overrightarrow{v}$は平行でない．よって，$\overrightarrow{u}$と$\overrightarrow{v}$のなす角をθとおくと，$0 < \theta < \pi$であり，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} \neq \pm 1 \quad \therefore \quad (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2 \neq |\overrightarrow{u}|^2|\overrightarrow{v}|^2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ．

また，点Pをℓ上，点Qをz軸上にとると，ℓとz軸はねじれの位置にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq \overrightarrow{0}$である．よって，$\ell$と$z$軸の両方に直交する直線は

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{v}$を満たす2点P，Qを通る直線

として得られ，

「$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{v}$ $\cdots\cdots$ Ⓐ を満たす2点P，Qがただ1組存在すること」

を示す．実数s，tを用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{v}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$$

と表せる．これをⒶに代入すると，

$$\begin{cases} (\overrightarrow{\mathrm{AO}} - s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{u} = 0 \\ (\overrightarrow{\mathrm{AO}} - s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{v} = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} |\overrightarrow{u}|^2 s - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})t = \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{u} \\ (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})s - |\overrightarrow{v}|^2 t = \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{v} \end{cases}$$

である．

ここで，$a = |\overrightarrow{u}|^2$，$b = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$，$c = |\overrightarrow{v}|^2$，$d = \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{u}$，$e = \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{v}$とおくと，

$$\begin{cases} as - bt = d \\ bs - ct = e \end{cases}$$

と表せ，$(*)$より，$ac - b^2 \neq 0$であることから，s，tについて解くと，

$$s = \frac{cd - be}{ac - b^2},\ t = \frac{bd - ae}{ac - b^2}$$

であり，s，tはただ1組存在する．

したがって，ℓとz軸の両方に直交する直線がただ1つ存在する．（証明終わり）

$\boxed{3}$

(1)　p_n の定義より，

$$p_1 = 2,\quad p_2 = 3,\quad p_3 = 5,\quad p_4 = 7\quad p_5 = 11,$$
$$p_6 = 13,\quad p_7 = 17,\quad p_8 = 19,\quad p_9 = 23,\quad p_{10} = 29,$$
$$p_{11} = 31,\quad p_{12} = 37,\quad p_{13} = 41,\quad p_{14} = 43,\quad p_{15} = 47$$

ゆえに，

$p_{15} = \mathbf{47}$ ……………………………………………………(答)

(2)　$n \geqq 12$ のとき

$(*) : p_n > 3n$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(I)　(1) の結果より $p_{12} = 37 > 3 \cdot 12$．よって $n = 12$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(II)　$n = k$ $(k \geqq 12)$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると，

$$p_k > 3k$$

p_k は奇数の素数だから $p_k + 1$ は 2 より大きい偶数となり素数ではない．ゆえに，

$$p_{k+1} \geqq p_k + 2 > 3k + 2 \qquad \therefore\ p_{k+1} \geqq 3(k+1)$$

$3(k+1)$ は 3 より大きい 3 の倍数だから素数ではない．よって，

$$p_{k+1} > 3(k+1)$$

以上より $n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(I)，(II) より $n \geqq 12$ のとき $(*)$ は成り立つ．　**(証明終わり)**