2024年度 一橋大学 前期 数学

1

$$\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=n\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$
$$=\frac{1}{6}m(m+1)\{3n-2(2m+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024$ より,

$$\frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)=2024 \Leftrightarrow m(m+1)(3n-4m-2)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23 \quad \cdots\cdots①$$

m, $m+1$ は連続する2整数であり，$2^4\cdot3\cdot11\cdot23$の正の約数である．m, $m+1$ の一方は奇数，他方は偶数であり, $2^4\cdot3\cdot11\cdot23$の正の約数のうち奇数であるものは, 1, 3, 11, 23, 33, 69, 253, 759 であり, 10, 32, 34, 68, 70, 252, 254, 758, 760 は$2^4\cdot3\cdot11\cdot23$の正の約数でないことに注意すると，$(m, m+1)$の組は,

$$(m, m+1)=(1, 2), (2, 3), (3, 4), (11, 12), (22, 23), (23, 24)$$

である．よって,

$$m=1, 2, 3, 11, 22, 23$$

のいずれかとなる．それぞれの場合において，①を満たす正の整数nを求めると,

$m=1$ のとき，①より，$2(3n-6)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23$ $\therefore$ $n=2026$

$m=2$ のとき，①より，$2\cdot3(3n-10)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23$ $\therefore$ $n=678$

$m=3$ のとき，①より，$3\cdot4(3n-14)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23$ $\therefore$ $n=342$

$m=11$ のとき，①より，$11\cdot12(3n-46)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23$ $\therefore$ $n=46$

$m=22$ のとき，①より，$22\cdot23(3n-90)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23$ $\therefore$ $n=38$

$m=23$ のとき，①より，$23\cdot24(3n-94)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23$ $\therefore$ $3n=116$ これを満たす正の整数nは存在しない.

以上から，求める組は,

$$(m, n)=(1, 2026), (2, 678), (3, 342), (11, 46), (22, 38) \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

$\boxed{2}$

$f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2+ax+b$ とおく．C と C' が共有する点を P とし，P の x 座標を p とおくと，P におけるそれぞれの接線が直交することから，

$$f(p)=g(p) \quad \text{かつ} \quad f'(p)\cdot g'(p)=-1$$

$$\therefore \quad p^2=-p^2+ap+b \quad \cdots\cdots① \quad \text{かつ} \quad 2p(-2p+a)=-1 \quad \cdots\cdots②$$

である．②より $p \neq 0$ であり，

$$a=2p-\frac{1}{2p} \quad \cdots\cdots③$$

となり，①に代入して，

$$b=2p^2-\left(2p-\frac{1}{2p}\right)p \qquad \therefore \quad b=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots④$$

である．このとき，$g(x)=-x^2+\left(2p-\dfrac{1}{2p}\right)x+\dfrac{1}{2}$ となり，C と C' の共有点の x 座標は，

$$x^2=-x^2+\left(2p-\frac{1}{2p}\right)x+\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad 2x^2-\left(2p-\frac{1}{2p}\right)x-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore \quad 2(x-p)\left(x+\frac{1}{4p}\right)=0 \qquad \therefore \quad x=p,\ -\frac{1}{4p}$$

であり，これらは異なる実数である．C と C' で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\left|\int_{-\frac{1}{4p}}^{p}\{g(x)-f(x)\}dx\right|=\left|\int_{-\frac{1}{4p}}^{p}\left\{-2(x-p)\left(x+\frac{1}{4p}\right)\right\}dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}\left(p+\frac{1}{4p}\right)^3\right| \quad \cdots\cdots⑤$$

である．⑤で p を $-p$ に置き換えても S は変わらないから，$p>0$ の場合を考えればよい．相加平均・相乗平均の不等式から，

$$\frac{1}{3}\left(p+\frac{1}{4p}\right)^3 \geqq \frac{1}{3}\left(2\sqrt{p\cdot\frac{1}{4p}}\right)^3=\frac{1}{3}$$

等号は，$p=\dfrac{1}{4p}$．すなわち，$p=\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{このとき③，④より，} a=0,\ b=\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する．

以上から，S の最小値は $\dfrac{1}{3}$ である．　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$(答)

$\boxed{3}$

$f(x)$はxに関する4次多項式で4次の係数は1であり，$f(x)$は$(x+1)^2$で割ると1余ることから，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2(x^2+ax+b)+1 \\ &= x^4+(a+2)x^3+(2a+b+1)x^2+(a+2b)x+b+1 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

と表すことができる．また，$f(x)$を$(x-1)^2=x^2-2x+1$で割ると，

$$f(x)=(x^2-2x+1)\{x^2+(a+4)x+4a+b+8\}+4(2a+b+3)x-4a-7$$

となる．$f(x)$を$(x-1)^2$で割った余りが2であることから，

$$4(2a+b+3)=0 \quad かつ \quad -4a-7=2$$

$$\therefore \quad a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{3}{2}$$

となる．これを①に代入して，

$$f(x)=x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{4}$

(1) 線分 AC の中点，線分 BD の中点はともに原点であるから，A，B，C，D がひし形の頂点となる条件は，OA⊥OB である．

$$\overrightarrow{OA}=(a,\ -1,\ -1),\ \overrightarrow{OB}=(-1,\ b,\ -1)$$

より，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow (a,\ -1,\ -1)\cdot(-1,\ b,\ -1)=0$$
$$\Leftrightarrow a+b=1 \qquad \cdots\cdots①(答)$$

である．

(2) ひし形 ABCD の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=4\triangle OAB=2OA\cdot OB\\&=2\sqrt{a^2+2}\sqrt{b^2+2}\\&=2\sqrt{a^2b^2+2(a^2+b^2)+4}\\&=2\sqrt{a^2b^2+2(a+b)^2-4ab+4}\\&=2\sqrt{(ab)^2-4ab+6}\quad(\because\ ①)\end{aligned}$$

である，$ab=t$ ……②とおくと，

$$S=2\sqrt{t^2-4t+6}=2\sqrt{(t-2)^2+2}$$

となる．

①，②より，a，b は X の 2 次方程式 $X^2-X+t=0$ ……③の 2 解であるから，$-1<a<1$，$-1<b<1$ より，③は $-1<X<1$ に 2 解をもつ．③の左辺を $f(X)$ とおくと，$Y=f(X)$ の軸 $X=\dfrac{1}{2}$ は $-1<X<1$ にあることから，t のとりうる値の範囲は，

(③の判別式)$\geqq 0$　かつ　$f(-1)>0$　かつ　$f(1)>0$

$\therefore$　$1-4t\geqq 0$　かつ　$2+t>0$　かつ　$t>0$

より，

$$0<t\leqq\frac{1}{4}$$

である．この範囲において，S は減少するから，S は $t=\dfrac{1}{4}$ $\left(a=b=\dfrac{1}{2}\right)$ のときに最小となり，求める最小値は，

$$2\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

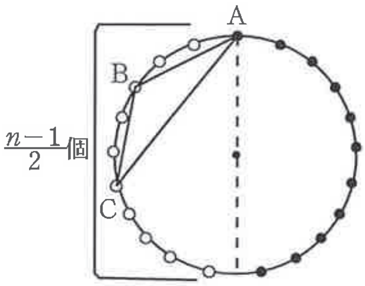
$\boxed{5}$

正n角形の頂点から３個の点の選び方は全部で ${}_n\mathrm{C}_3$通り……①であり，これらは同様に確からしい．

３点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる条件は，三角形が鋭角三角形となることである．nが奇数のとき３点を頂点とする直角三角形は存在しないことから，鋭角三角形となることの余事象は，３点を頂点とする三角形が鈍角三角形となることである．

①の中で鈍角三角形となるものの個数を数える．鈍角三角形 ABC は∠B が鈍角であり，３点 A，B，C がこの順に反時計回りに並ぶものを考える．A を正n角形の一つの頂点に固定したとき，B，C は図の

$\dfrac{n-1}{2}$個の○の点から２点を選ぶこととなり，$n \geqq 5$のとき，



その個数は，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2=\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{8}\text{通り}$$

となる．

頂点 A の選び方はn通りであることから，
鈍角三角形の個数は全部で，

$$\frac{(n-1)(n-3)}{8}\cdot n=\frac{n(n-1)(n-3)}{8}\text{通り}$$

となる．$n=3$のとき，鈍角三角形の個数は０個であるから，これは$n=3$のときも正しい．

以上から，求める確率p_nは，

$$p_n=1-\frac{\frac{n(n-1)(n-3)}{8}}{{}_n\mathrm{C}_3}$$

$$=1-\frac{n(n-1)(n-3)}{8}\cdot\frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$

$$=1-\frac{3(n-3)}{4(n-2)}$$

$$=\frac{n+1}{4(n-2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．