2024年度 北海道大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$

(1)　$2^m \cdot 3^n$ の正の約数は

$$2^x \cdot 3^y \quad (x = 0, 1, \cdots, m,\ y = 0, 1, \cdots, n)$$

と表せるから, $2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数は

$$(m+1)(n+1) \text{ 個} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2)　$6912 = 2^8 \cdot 3^3$ であるから, 6912 の正の約数は

$$2^x \cdot 3^y \quad (x = 0, 1, \cdots, 8,\ y = 0, 1, 2, 3)$$

と表せる. よって, 6912 の正の約数の総和は

$$\begin{aligned}(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^8)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) &= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \\ &= 511 \cdot 40 \\ &= 20440 \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である. 6912 の正の約数のうち, 12 で割り切れるものは $x \geqq 2$ かつ $y \geqq 1$ を満たすものであるから, そのような数の総和は

$$\begin{aligned}(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8)(3^1 + 3^2 + 3^3) &= (511 - 2^0 - 2^1) \cdot (40 - 3^0) \\ &= 508 \cdot 39 \\ &= 19812 \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

である. ① ②より, 求める総和は

$$20440 - 19812 = 628 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

$\boxed{2}$

$$a_{n+1}=3a_n-\frac{3^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \cdots\cdots①$$

(1)　①の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{n(n+1)}$$

である. $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ であるから

$$b_{n+1}=b_n-\frac{1}{n(n+1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2)　(1) より

$$b_{n+1}=b_n-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore\quad b_{n+1}-\frac{1}{n+1}=b_n-\frac{1}{n}$$

である. よって, 数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{n}\right\}$ は定数数列であり, $b_1=\dfrac{a_1}{3}=1$ より $b_1-\dfrac{1}{1}-0$ であるから

$$b_n-\frac{1}{n}=0 \qquad \therefore\ b_n=\frac{1}{n}$$

である. $a_n=3^n\cdot b_n$ であるから

$$a_n=\frac{3^n}{n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(別解)　$b_1=\dfrac{a_1}{3}=1$ である. (1) より, $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{1}{k(k+1)}\right\}\\&=1-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=1-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots②$$

であり, ②は $n=1$ のときも成り立つ. $a_n=3^n\cdot b_n$ であるから

$$a_n=\frac{3^n}{n}$$

である.

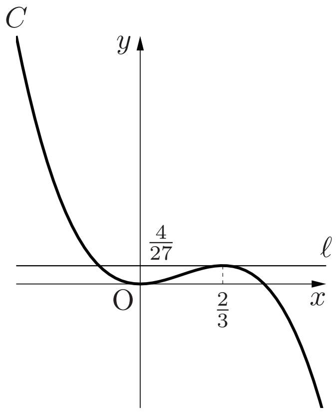
$\boxed{3}$

(1)　$y = -x^3 + x^2$ のとき

$$y' = -3x^2 + 2x = -x(3x-2)$$

であるから, 増減表は下のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘



　これより, C は右の図のようになるから, $a \fallingdotseq 0$ に注意すると, C と ℓ がちょうど 2 つの共有点をもつような a の値は

$$a = \frac{4}{27}$$ ……(答)

である.

(2)　C と ℓ の共有点の x 座標は

$$-x^3 + x^2 = \frac{4}{27}$$

の実数解と一致する. これを解くと

$$x^3 - x^2 + \frac{4}{27} = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$$ ……(答)

である.

(3)　$-\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3}$ において $-x^3 + x^2 \leqq \frac{4}{27}$ であるから, 求める面積は

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left\{\frac{4}{27} - (-x^3 + x^2)\right\} dx &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x^3 - x^2 + \frac{4}{27}\right) dx \\
&= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) dx \\
&= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{2}{3} + 1\right) dx \\
&= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left\{\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + \left(x - \frac{2}{3}\right)^2\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)^3\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \\
&= -\left\{\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3\right\} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$ ……(答)

である.

$\boxed{4}$

「k」が書かれた面を k の面と呼ぶことにする $(k=0,1,2,3)$ と, 試行を 1 回行ったとき, 1, 2, 3 の面が出る確率はいずれも $\dfrac{1}{8}$ であり, 0 の面が出る確率は $\dfrac{5}{8}$ である.

(1) 試行を 2 回行ったとき, 持ち点が 1 となるのは, 1 の面と 0 の面が 1 回ずつ出るときであるから, 求める確率は

$${}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{32} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) 試行を 4 回行ったとき, 持ち点が 11 以上となるのは

(i) 3 の面が 4 回出て持ち点が 12 となる

(ii) 2 の面が 1 回と 3 の面が 3 回出て持ち点が 11 となる

のいずれかの場合であり, これらは互いに排反である.

(i) が起こる確率は

$$\left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{8^4}$$

であり, (ii) が起こる確率は

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{4}{8^4}$$

である. したがって, 試行を 4 回行ったとき, 持ち点が 11 以上となる $\cdots\cdots$① 確率は

$$\frac{1}{8^4} + \frac{4}{8^4} = \frac{5}{4096}$$

であり, 求める確率は事象①の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{5}{4096} = \frac{4091}{4096} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.