2024年度 北海道大学 前期 数学 理系

$\boxed{1}$

(1) 点 P と点 Q が一致するとき

$$\cos 2t = \sin t \text{ かつ } \cos t = \sin 2t$$
$$\therefore\ 1 - 2\sin^2 t = \sin t \text{ かつ } \cos t = 2\sin t\cos t$$
$$\therefore\ (\sin t + 1)(2\sin t - 1) = 0 \text{ かつ } \cos t(2\sin t - 1) = 0$$
$$\therefore\ \sin t = \frac{1}{2} \text{ または「}\sin t = -1 \text{ かつ } \cos t = 0\text{」}$$

であるから, 求める t の値は,

$$t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$ ……(答)

である.

(2) $\begin{cases} x = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \\ y = \cos t \\ 0 < t < 2\pi \end{cases}$ を同時にみたす実数 t が存在する ……$(*)$

ような (x, y) の集合が点 P の軌跡である.

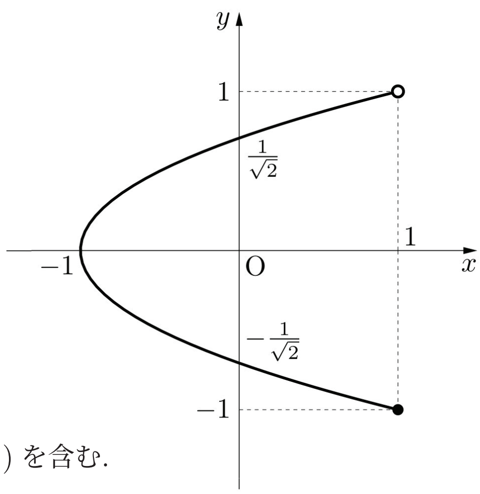
$(*)$ の条件は,

$$x = 2y^2 - 1 \quad \text{かつ} \quad -1 \leqq y < 1$$
$$\therefore\ y^2 = \frac{1}{2}(x+1) \quad \text{かつ} \quad -1 \leqq y < 1$$

である. よって, 点 P の軌跡は放物線 $y^2 = \dfrac{1}{2}(x+1)$ の $-1 \leqq y < 1$ の部分であり,

$$y = 0 \text{ とすると}, x = -1$$
$$x = 0 \text{ とすると}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから, 右図のようになる. 端点は, 点 $(1, 1)$ を除き, 点 $(1, -1)$ を含む.



参考

(1) の解は, $t = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2n\pi}{3}$ とまとめることもできる.

$\boxed{2}$

「k」が書かれた面を，k の面と呼ぶことのする ($k=0,\ 1,\ 2,\ 3$) と，試行を 1 回行ったとき，1，2，3 の面が出る確率はいずれも $\dfrac{1}{8}$ であり，0 の面が出る確率は $\dfrac{5}{8}$ である．

(1)　試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下となるのは，

(i)　0 の面が n 回出る

(ii)　0 の面が $n-1$ 回と 1 または 2 の面が 1 回出る

(iii)　0 の面が $n-2$ 回と 1 の面が 2 回出る

のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である．

(i) が起こる確率は，

$$\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

であり，(ii) が起こる確率は，

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{8}=\frac{n}{4}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

であり，(iii) が起こる確率は，

$${}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{2}=\frac{n(n-1)}{128}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}$$

である．したがって，試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下となる確率は，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{5}{8}\right)^n+\frac{n}{4}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{128}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}\\&=\frac{50+20n+n(n-1)}{128}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}\\&=\frac{n^2+19n+50}{128}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$(答)

である．

(2)　試行を 4 回行って持ち点が 10 以上となる事象を A，試行を 6 回行って持ち点が 17 以上となる事象を B とすると，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

である．

A が起こるのは，

- 3 の面が 4 回出る
- 3 の面が 3 回と 1 または 2 の面が 1 回出る
- 3 の面が 2 回と 3 の面が 2 回出る

のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である．したがって，

$$P(A)=\left(\frac{1}{8}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{8}\right)^3\cdot\frac{2}{8}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{15}{8^4}$$

である．

$A\cap B$ が起こるのは，

- 試行を 4 回行って持ち点が 12 となり，次の 2 回の試行で 3 の面が 2 回出る
- 試行を 4 回行って持ち点が 12 となり，次の 2 回の試行で 3 の面が 1 回と 2 の面が 1 回出る
- 試行を 4 回行って持ち点が 11 となり，次の 2 回の試行で 3 の面が 2 回出る

のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である．したがって，

$$P(A\cap B)=\left(\frac{1}{8}\right)^4\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\right\}+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{8}\right)^3\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{7}{8^6}$$

である．

以上より，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{\frac{7}{8^6}}{\frac{15}{8^4}}=\frac{7}{960} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$\boxed{3}$

(1)
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad (n = 1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots①$$

① を変形すると

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

となる．よって，数列 $\{a_n - 2\}$ は公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる．したがって，

$$a_n = (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)
$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \qquad (n = 1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots②$$

について，$b_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ $(n = 1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$ とおくと，② は

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + b_n x \qquad (n = 1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$$

となり，これより

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \left\{(n+2)t^{n+1} + b_n t\right\}\,dt \\ &= \left[t^{n+2} + \frac{b_n}{2}t^2\right]_0^1 \\ \therefore \quad b_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + 1 \qquad (n = 1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots) \end{aligned}$$

である．

$$b_1 = \int_0^1 f_1(t)\,dt = \int_0^1 3t\,dt = \frac{3}{2}$$

であるから，(1) の結果を用いると，

$$b_n = \left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．したがって，$n \geqq 1$ のとき，

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}x$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$f_n(x) = (n+1)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x \qquad \cdots\cdots③$$

である．③に $n = 1$ を代入すると

$$f_1(x) = 2x + (2-1)x = 3x$$

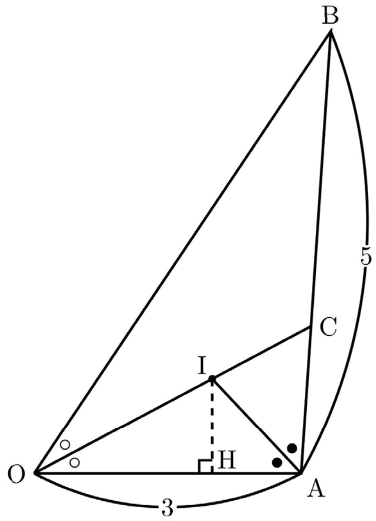
となるから，③は $n=1$ でも成り立つ．

以上より，

$$f_n(x)=(n+1)x^n+\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$\boxed{4}$



(1) $$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\therefore \quad 25 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 9 - 20$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 36$$

であるから, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 6$, すなわち, 辺 OB の長さは

6 ……(答)

である.

(2) OI と AB の交点を C とすると, OC は $\angle$O の二等分線であるから,

$$\mathrm{AC} : \mathrm{CB} = \mathrm{OA} : \mathrm{OB}$$
$$= 3 : 6 = 1 : 2$$

である. これより,

$$\mathrm{AC} = 5 \cdot \frac{1}{1+2} = \frac{5}{3}$$

であり, AI は $\angle$A の二等分線であるから,

$$\mathrm{OI} : \mathrm{IC} = \mathrm{AO} : \mathrm{AC}$$
$$= 3 : \frac{5}{3}$$
$$= 9 : 5$$

となる. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{9}{14} \cdot \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$
$$= \frac{6\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{14}$$ ……(答)

である.

(3) H が辺 OA 上にあることより, 実数 k を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくことができ, このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} - k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である. HI $\perp$ OA より, $\overrightarrow{\mathrm{HI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}} - k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} - k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 0$$

$$\therefore \quad k = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2} = \frac{6|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{14|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2} = \frac{54+30}{126} = \frac{2}{3}$$

である. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{3\left(6\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - 28\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{42}$$

であるから,

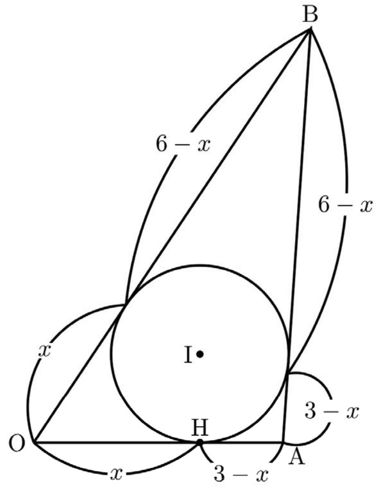
$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \frac{-10\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 9\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{42} \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

参考

(3) では, 図のように $\mathrm{OH} = x$ とおき, AB の長さに注目すると,

$$5 = (3 - x) + (6 - x)$$
$$\therefore \quad x = 2$$



となることから, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ としてもよい.

$\boxed{5}$

(1) $$f'(x) = \log(x+2) + \frac{x}{x+2}$$

であるから，$t > -2$ として C の $x = t$ における接線の方程式は

$$y - \{t\log(t+2)+1\} = \left\{\log(t+2) + \frac{t}{t+2}\right\}(x-t)$$

である．整理すると

$$y = \left\{\log(t+2) + \frac{t}{t+2}\right\}x - \frac{t^2}{t+2} + 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．①が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき

$$0 = -\frac{t^2}{t+2} + 1$$

であり，整理すると

$$0 = -t^2 + t + 2 \quad \text{すなわち} \quad (t+1)(t-2) = 0$$

となるから

$$t = -1,\ 2$$

である．ここで

$$f'(-1) = \log 1 + \frac{-1}{1} = -1 < 0$$
$$f'(2) = \log 4 + \frac{1}{2} = 2\log 2 + \frac{1}{2} > 0$$

であり，ℓ の傾きは正であるから，求める ℓ の方程式は①で $t = 2$ とした

$$y = \left(2\log 2 + \frac{1}{2}\right)x \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

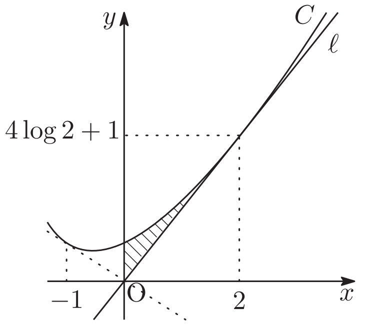
(2) $f'(x) = \log(x+2) + 1 - \dfrac{2}{x+2}$ を x で微分すると

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} > 0 \quad (\because \quad x > -2)$$

となるから，C は下に凸である． □

(3) ℓ の方程式を $y = g(x)$ とする．

曲線 C が下に凸であることと，ℓ が C の $x = 2$ における接線であることから，C と l は $x = 2$ でのみ共有点をもち，$x > -2$ のとき常に $f(x) \geqq g(x)$ である．



したがって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^2 f(x)dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(4\log 2+1)$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx&=\int_0^2 \{x\log(x+2)+1\}\,dx\\&=\left[\frac{x^2-4}{2}\log(x+2)\right]_0^2-\int_0^2\frac{x^2-4}{2}\cdot\frac{1}{x+2}dx+\big[x\big]_0^2\\&=0-(-2)\log 2-\int_0^2\frac{x-2}{2}dx+2\\&=2\log 2-\left[\frac{1}{4}(x-2)^2\right]_0^2+2\\&=2\log 2-(0-1)+2\\&=2\log 2+3\end{aligned}$$

であるから

$$S=2\log 2+3-(4\log 2+1)=2-2\log 2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(別解)　(3) の $\int_0^2 f(x)dx$ は次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx&=\int_0^2 \{x\log(x+2)+1\}\,dx\\&=\left[\frac{x^2}{2}\log(x+2)\right]_0^2-\int_0^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+2}dx+\big[x\big]_0^2\\&=2\log 4-0-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{(x+2)(x-2)+4}{x+2}dx+2\\&=4\log 2-\frac{1}{2}\int_0^2\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx+2\\&=4\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x-2)^2+4\log(x+2)\right]_0^2+2\\&=4\log 2-\frac{1}{2}\{0+4\log 4-(2+4\log 2)\}+2\\&=4\log 2-2\log 4+1+2\log 2+2\\&=2\log 2+3\end{aligned}$$